

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS  
FACULTÉ DES SCIENCES  
Laboratoire J. A. Dieudonné  
U.M.R. du C.N.R.S. No 6621

## THÈSE

présentée pour obtenir le titre de  
Docteur en Sciences  
spécialité : Mathématiques  
par

Angela ORTEGA ORTEGA

# Sur l'espace des modules des fibrés vectoriels de rang 3 sur une courbe de genre 2 et la cubique de Coble.

Soutenue le 15 septembre 2003 devant le jury composé de :

M. Arnaud BEAUVILLE	Professeur à l'Université de Nice
M. André HIRSCHOWITZ	Professeur à l'Université de Nice
M. Yves LASZLO	Professeur à l'Université de Paris VI
M. Mudumbai S. NARASIMHAN	Professeur à l'International School for Advanced Studies, Trieste, Italie
M. Christian PAULY	Chargé de recherche CNRS
M. Christoph SORGER	Professeur à l'Université de Nantes



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Rappels . . . . .	1
1.1.1 Variétés abéliennes . . . . .	1
1.1.2 Variétés de Prym . . . . .	2
1.1.3 Groupe de Heisenberg . . . . .	2
1.2 La cubique de Coble . . . . .	5
<b>2 Preuve de la conjecture de Dolgachev</b>	<b>9</b>
2.1 L'application $\theta$ . . . . .	9
2.2 Le lieu de ramification de l'application $\theta$ . . . . .	11
2.3 Les automorphismes de $\mathcal{S}_{2,\lambda}$ . . . . .	14
2.4 Calcul du degré de la variété duale $\mathcal{C}^*$ . . . . .	14
2.5 L'application duale sur les sécantes de $J^1$ . . . . .	16
2.6 Sextiques planes . . . . .	22
2.7 Le produit des courbes elliptiques . . . . .	23
2.8 Sextiques invariantes . . . . .	30
<b>3 Variétés de Prym</b>	<b>37</b>
3.1 Décomposition de la variété de Prym . . . . .	37
3.2 La polarisation . . . . .	42
<b>Annexe</b>	<b>45</b>



# Introduction

L'objectif de cette thèse est de résoudre une conjecture, due à I. Dolgachev et énoncée par Y. Laszlo dans [19], concernant l'espace des modules des fibrés vectoriels de rang 3 avec déterminant trivial sur une courbe donnée de genre 2. On va d'abord énoncer un résultat de géométrie algébrique classique obtenu par Coble au début du XXème siècle, ainsi que quelques généralités et résultats sur les espaces des modules de fibrés vectoriels afin de préciser le contexte dans lequel se place la dite conjecture.

Soit  $A$  une variété abélienne complexe de dimension  $g$  et soit  $L$  un fibré en droites sur  $A$  qui définit une polarisation principale. Pour un entier fixe  $d \geq 1$  on note  $V_d = H^0(A, L^{\otimes d})$ . On considère  $\varphi_d : A \rightarrow \mathbb{P}(V_d)$ <sup>1</sup> l'application définie par les sections globales de  $L^{\otimes d}$ . Rappelons que pour  $d \geq 3$ ,  $\varphi_3$  est un plongement, tandis que  $\varphi_2$  induit un plongement de la variété de Kummer  $A/\{\pm 1\}$  dans  $\mathbb{P}(V_2)$ , lorsque  $(A, L)$  est indécomposable. Soit  $A[d]$  le sous-groupe fini des points d'ordre  $d$  en  $A$ ;  $A[d]$  agit sur  $A$  en préservant le fibré  $L^{\otimes d}$ , donc agit sur  $\mathbb{P}(V_d)$  de manière que  $\varphi_d$  est  $A[d]$ -équivariant.

**Théorème 1** (*A. Coble*)

*a) Soit  $g = 2$ . Il existe une unique hypersurface cubique  $A[3]$ -invariante dans  $\mathbb{P}(V_3) \simeq \mathbb{P}^8$  singulière le long de  $\varphi_3(A)$ . Les polaires de cette cubique engendrent l'espace des quadriques dans  $\mathbb{P}(V_3)$  contenant  $\varphi_3(A)$  [9].*

*b) Soit  $g = 3$ . Il existe une unique hypersurface quartique  $A[2]$ -invariante dans  $\mathbb{P}(V_2) \simeq \mathbb{P}^7$  singulière le long de  $\varphi_2(A)$ . Les polaires de cette quartique engendrent l'espace des cubiques dans  $\mathbb{P}(V_2)$  contenant  $\varphi_2(A)$  [10].*

Comme on le verra par la suite, il y a un lien étroit entre les observations faites par Coble il y a presque un siècle et quelques résultats, beaucoup plus récents, concernant les espaces des modules de fibrés vectoriels.

Soit  $C$  une courbe lisse, projective et connexe de genre  $g \geq 2$ . Rappelons que la jacobienne  $JC$  paramètre les fibrés en droites de degré 0 sur  $C$ . On considère  $J^{g-1}$  (variété isomorphe à  $JC$ ) la variété qui paramètre les fibrés

---

<sup>1</sup>Ici  $\mathbb{P}(V_d)$  désigne l'espace d'hyperplans de  $V_d$

en droites de degré  $g - 1$  sur  $C$ . Cette variété contient canoniquement le diviseur thêta défini ensemblistement par

$$\Theta = \{M \in J^{g-1} \mid h^0(C, M) \geq 1\}.$$

Soit  $\mathcal{SU}_C(r)$  l'espace des modules des fibrés vectoriels semi-stables sur  $C$  de rang  $r$  et de déterminant trivial. C'est une variété projective irréductible, dont le lieu singulier consiste exactement en les points non-stables, sauf si  $r = 2, g = 2$ . Dans ce cas  $\mathcal{SU}_C(2)$  est lisse. On définit une application rationnelle

$$\theta : \mathcal{SU}_C(r) \dashrightarrow |r\Theta|$$

telle que  $\theta(E)$  est le diviseur de support

$$\Theta_E := \{L \in J^{g-1} \mid h^0(C, E \otimes L) \geq 1\}.$$

Pour certaines valeurs de  $r$  et de  $g$  il existe des éléments  $E$  dans  $\mathcal{SU}_C(r)$  tels que  $\Theta_E = J^{g-1}$ . M. Raynaud [30] donne des exemples de tels fibrés vectoriels et des conditions sous lesquelles  $\Theta_E$  définit un diviseur dans  $J^{g-1}$ . En particulier, les résultats de Raynaud montrent que l'application  $\theta$  est bien définie pour  $r = 2$  en genre quelconque et pour  $r = 3$  et  $g = 2$ , ce qui est le cas qui nous intéresse.

Lorsque  $r = 2$  le système linéaire  $|2\Theta|$  est particulièrement intéressant parce qu'il contient la variété de Kummer  $\mathcal{K}_C$ , i.e. le quotient de la jacobienne  $JC$  par l'involution  $a \mapsto -a$ . Donc l'application

$$\begin{array}{ccc} JC & \rightarrow & |2\Theta| \\ a & \mapsto & \Theta_a + \Theta_{-a} \end{array}$$

factorise par le plongement  $\kappa : \mathcal{K}_C \hookrightarrow |2\Theta|$ . La partie non-stable de  $\mathcal{SU}_C(2)$  est formée des fibrés vectoriels de la forme  $M \oplus M^{-1}$ , avec  $M \in JC$  et donc elle s'identifie à  $\mathcal{K}_C$ . Pour  $g \geq 3$  ces fibrés forment le lieu singulier de  $\mathcal{SU}_C(2)$ . On obtient ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_C & & \\ \downarrow & \searrow \kappa & \\ \mathcal{SU}_C(2) & \xrightarrow{\theta} & |2\Theta| \end{array}$$

On résume dans le théorème suivant les résultats connus sur l'application  $\theta$  pour les fibrés de rang 2.

**Théorème 2**

- a) Pour  $g = 2$ ,  $\theta$  est un isomorphisme de  $\mathcal{SU}_C(2)$  sur  $|2\Theta| \simeq \mathbb{P}^3$  [26].
- b) Pour  $g \geq 3$  et  $C$  hyperelliptique,  $\theta$  est fini de degré 2 sur une sous-variété de  $|2\Theta|$  qui est décrite explicitement dans [11].
- c) Pour  $g \geq 3$  et  $C$  non-hyperelliptique,  $\theta$  est un plongement [15].

Dans le cas où  $C$  est une courbe non-hyperelliptique de genre 3, Narasimhan et Ramanan [27] ont démontré que  $\theta$  est un isomorphisme de  $\mathcal{SU}_C(2)$  dans une hypersurface quartique  $\mathcal{Q}$  dans  $|2\Theta| \simeq \mathbb{P}^7$ . Par la remarque ci-dessus, cette quartique est singulière le long de la variété de Kummer  $\mathcal{K}_C$ . Par ailleurs, par le théorème 1 a) il existe une *unique* hypersurface quartique  $A[2]$ -invariante dans  $|2\Theta|$  qui est singulière le long de  $\mathcal{K}_C$ . Ainsi la quartique  $\mathcal{Q}$  est justement la quartique de Coble.

Dans ce travail, on considère une courbe de genre 2 et l'espace des modules  $\mathcal{SU}_C(3)$ . Par analogie avec le résultat de Narasimhan et Ramanan, le théorème principal de la thèse établit le lien entre l'espace de modules  $\mathcal{SU}_C(3)$  et l'hypersurface cubique dans  $\mathbb{P}^8$  donnée par le théorème 1 b). On a appelé cette hypersurface *cubique de Coble*. Dans cette situation l'application

$$\theta : \mathcal{SU}_C(3) \rightarrow |3\Theta| \simeq \mathbb{P}^8,$$

est bien définie et de degré 2. On note  $\mathbf{i}$  l'involution dans  $\mathcal{SU}_C(3)$  définie par

$$\mathbf{i} : E \mapsto \iota^* E^*,$$

où  $\iota$  est l'involution hyperelliptique sur  $C$ . On démontre que le lieu de ramification de  $\theta$  est égal aux points fixés par cette involution, autrement dit, il est égal à

$$\{E \in \mathcal{SU}_C(3) \mid E \sim_s \iota^* E^*\}.$$

Soit  $\mathcal{B}$  l'image de cette hypersurface dans  $\mathbb{P}^8$ . On pose  $A = JC$ . On considère la variété  $J^1 = \text{Pic}^1(C)$  et le plongement  $\varphi_3 : J^1 \rightarrow |3\Theta|^*$ . Le groupe  $A[3]$  agit sur  $J^1$  et  $|3\Theta|^*$  de manière que  $\varphi_3$  est  $A[3]$ -équivariant. Par le théorème 1 b) il existe une *unique* cubique  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^{8*}$ ,  $A[3]$ -invariante et singulière le long de  $J^1$ . On énonce le résultat principal de la thèse comme suit

**Théorème 3** *La variété duale de la cubique de Coble  $\mathcal{C}$  est l'hypersurface sextique  $\mathcal{B}$ .*

Remarque : La variété  $J^1$  (isomorphe à  $JC$ ) n'est pas une variété abélienne, mais elle contient canoniquement le diviseur thêta  $\Theta$ , c'est pourquoi on a choisi de considérer cette variété au lieu de la jacobienne  $JC$ .

*Esquisse de la démonstration.*

L'outil clef de la preuve est l'action du groupe de Heisenberg  $\mathcal{H}[3]$ , puisque l'on utilise les restrictions aux plans des points fixes par un élément du groupe de Heisenberg pour comparer les hypersurfaces  $\mathcal{C}^*$  et  $\mathcal{B}$ . On notera  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  le plan des points fixés par l'élément  $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}[3]$ .

Tout d'abord on décrit le lieu de ramification de l'application  $\theta$  en termes de l'involution  $\mathbf{i}$  sur  $\mathcal{SU}_C(3)$ . On calcule le degré de la variété duale  $\mathcal{C}$ , donnée nécessaire pour montrer que  $\mathcal{C}^* \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 = (\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2)^*$ . Les intersections de  $\mathcal{C}^*$  avec

les plans des points fixes sont donc des sextiques planes duales des cubiques  $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$ .

D'un autre côté, pour montrer que les sextiques planes  $\mathcal{B} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  sont en fait des courbes duales de certaines cubiques, on fait appel au théorème sur les variétés de Prym exposé dans le chapitre 3 de la thèse et prouvé dans un cas plus général.

Le pas suivant consiste à définir deux applications sur les sécantes de  $J^1$ , une avec image contenue dans le lieu singulier de  $\mathcal{C}$  et l'autre avec image contenue dans le lieu singulier de  $\mathcal{B}$ . On démontre que ces deux applications coïncident. Ceci et le fait que ces sextiques planes sont complètement caractérisées par leurs points de rebroussement, est suffisant pour montrer que, pour tout  $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}[3]$  non nul,  $\mathcal{C}^* \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  et  $\mathcal{B} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  est la même sextique.

L'idée est de prouver que les intersections d'une sextique  $A[3]$ -invariante avec les plans  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  la caractérisent complètement. Pour cela, on commence par donner une base explicite de  $(S^6V)^{A[3]}$ , l'espace vectoriel des sextiques  $A[3]$ -invariantes dans  $\mathbb{P}^8$ . On considère l'application  $\nu$  qui envoie une sextique dans  $(S^6V)^{A[3]}$  en la somme directe de ses restrictions aux plans  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$ . À l'aide du logiciel Maple on calcule le rang de cette application. Il s'avère qu'elle n'est pas injective. Cependant, on prouve que la différence (à scalaire près) des polynômes qui définissent les sextiques  $\mathcal{C}^*$  et  $\mathcal{B}$  est invariante par  $\iota$ , l'involution induite par l'involution hyperelliptique, et que le noyau de  $\nu$  est  $\iota$ -anti-invariant. On conclut ainsi l'égalité de ces hypersurfaces.

#### *Organisation de la thèse.*

La thèse est composée de trois chapitres. Dans le premier chapitre on rappelle quelques définitions et résultats sur le groupe de Heisenberg et son action sur  $H^0(A, \mathcal{O}_A(3\Theta))$ , qu'on utilise dans la deuxième partie. On présente également l'équation explicite de la cubique de Coble, utile pour certaines preuves, et on explique son origine.

Le chapitre 2 est entièrement consacré à la démonstration de notre théorème. Finalement, dans le troisième chapitre on expose un résultat sur la décomposition des variétés de Prym associées aux revêtements  $n$ -cycliques sur une courbe hyperelliptique, utilisé dans la preuve de la conjecture.



# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Rappels

On trouvera plus de détails sur les faits qu'on rappelle ici, dans [20], [23], [24] et [25].

#### 1.1.1 Variétés abéliennes

Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dim  $g$  et  $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2g}$  un réseau dans  $V$ . Une *polarisation* sur le tore complexe  $A = V/\Lambda$  est par définition la première classe de Chern  $H = c_1(L)$  d'un fibré en droites ample  $L$  sur  $A$ . Parfois on considère le fibré en droites lui-même comme la polarisation.

La polarisation  $H$  est une forme hermitienne sur  $V$  dont la forme alternée associée  $E = \text{Im} H$  prend des valeurs entières sur  $\Lambda$ . Il existe une base  $\lambda_1, \dots, \lambda_g, \mu_1, \dots, \mu_g$  de  $\Lambda$ , par rapport à laquelle  $E$  est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

où  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_g)$ , avec  $d_\nu$  entiers positifs vérifiant  $d_\nu \mid d_{\nu+1}$  pour  $1 \leq \nu \leq g-1$ . On appelle le vecteur  $(d_1, \dots, d_g)$  le *type de la polarisation*. Une polarisation est principale si elle est de type  $(1, \dots, 1)$ . Une *variété abélienne* est un tore complexe  $A$  qui admet une polarisation. Ainsi une variété abélienne principalement polarisée (v.a.p.p.) est un couple  $(A, L)$  où  $L$  est une polarisation principale.

Soit  $C$  une courbe lisse non singulière de genre  $g$ . On note  $H^0(\omega_C)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur  $C$ . Le groupe d'homologie  $H_1(C, \mathbb{Z})$  est un groupe libre abélien de rang  $2g$ . L'application injective  $H_1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(\omega_C)^*$  donnée par  $\gamma \mapsto \int_\gamma$  nous permet de considérer  $H_1(C, \mathbb{Z})$  comme un réseau de  $H^0(\omega_C)^*$ . La *variété jacobienne* de  $C$ , définie par

$$JC := H^0(\omega_C)^*/H_1(C, \mathbb{Z}),$$

est le premier exemple d'une variété abélienne qui admet naturellement une polarisation principale  $\mathcal{O}_{JC}(\Theta)$ .

### 1.1.2 Variétés de Prym

Soient  $\tilde{C}$  et  $C$  des courbes complètes non-singulières avec des jacobienes  $\tilde{J}$  et  $J$  respectivement. Soit  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$  un revêtement double et  $i : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$  l'involution qui échange les feuilles au-dessus de chaque point de  $C$ . On définit l'application *Norme de*  $\pi$ , en termes de diviseurs, par

$$\begin{aligned} \text{Nm}_\pi : \quad \tilde{J} &\rightarrow J \\ \sum n_i p_i &\mapsto \sum n_i \pi(p_i), \end{aligned}$$

où  $p_i \in \tilde{C}$  et  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Pour tout diviseur  $\mathfrak{D}$  dans  $\tilde{C}$  on a  $\pi^{-1}(\pi\mathfrak{D}) = \mathfrak{D} + i(\mathfrak{D})$ , d'où

$$\pi^*(\text{Nm}_\pi x) = x + i(x), \quad \forall x \in \tilde{J}.$$

Comme l'application  $\text{Nm}_\pi$  est surjective, ceci montre que

$$i(\pi^* y) = \pi^* y, \quad \forall y \in J.$$

Donc  $i|_{\pi^* J} = +1$  et  $i|_{\text{Ker Nm}_\pi} = -1$ . On définit la *variété de Prym* de  $\tilde{C}$  sur  $C$  par

$$P := (\text{Ker Nm}_\pi)^0 = \text{Im}(1_{\tilde{J}} - i).$$

Cette variété est une sous-variété abélienne de  $\tilde{J}$  (la partie "impaire" de  $\tilde{J}$ ). Dans [24] D. Mumford établit les cas où  $P$  admet une polarisation principale.

Dans le chapitre 3 on considérera une notion de variétés de Prym élargie : on considère un revêtement étale  $n$ -cyclique  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$  et on définit la variété de Prym comme la composante connexe du noyau de la Norme  $\text{Nm}_\pi$ , qui contient  $0 \in \tilde{J}$ . À différence des variétés considérées par Mumford, celles-ci ne sont pas principalement polarisées.

### 1.1.3 Groupe de Heisenberg

Soit  $(A, L)$  une variété abélienne principalement polarisée. Le *groupe theta de*  $L$  de niveau 3 est le groupe

$$\mathcal{G}(L) = \{(\varphi, \eta) \mid \eta \in A, \varphi : t_\eta^*(L^3) \xrightarrow{\sim} L^3\},$$

avec l'opération du groupe donnée par

$$(\varphi, \eta) \cdot (\varphi', \eta') = (t_{\eta'}^* \varphi \circ \varphi', \eta + \eta').$$

On a l'extension centrale de groupes

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{i} \mathcal{G}(L) \xrightarrow{p} A[3] \longrightarrow 0,$$

avec  $i(\alpha) = (\alpha, 0)$  et  $p(\varphi, \eta) = \eta$  et  $A[3]$  le sous-groupe fini des points d'ordre 3. Le commutateur  $[(\varphi, \eta), (\varphi', \eta')]$  de deux éléments dans  $\mathcal{G}(L)$  appartient au centre, et induit la *forme de Weyl*

$$e^L : A[3] \times A[3] \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Comme groupe abstrait  $\mathcal{G}(L)$  est isomorphe au groupe de Heisenberg

$$\mathcal{H}(3) := \mathbb{C}^* \times (\mathbb{Z}/3)^g \times (\widehat{\mathbb{Z}/3})^g \simeq \mathbb{C}^* \times (\mathbb{Z}/3)^{2g},$$

où  $(\widehat{\mathbb{Z}/3})^g := \text{Hom}((\mathbb{Z}/3)^g, \mathbb{C}^*)$ , avec la loi de groupe

$$(t, x, x^*) \cdot (s, y, y^*) = (st(y^*(x) - x^*(y)), x + y, x^* y^*).$$

On note  $\langle (x, x^*), (y, y^*) \rangle := y^*(x) - x^*(y)$  la forme bilinéaire sur  $(\mathbb{Z}/3)^g \times (\widehat{\mathbb{Z}/3})^g$ . La projection  $(t, x, x^*) \mapsto (x, x^*)$  définit une extension centrale de groupes

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{H}(3) \longrightarrow (\mathbb{Z}/3)^{2g} \longrightarrow 0.$$

Une *structure thêta* de niveau 3 pour  $L$  est un isomorphisme

$$\alpha : \mathcal{H}(3) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(L).$$

Par projection sur  $(\mathbb{Z}/3)^{2g}$ , une structure thêta  $\alpha$  (de niveau 3) induit un isomorphisme

$$\tilde{\alpha} : (\mathbb{Z}/3)^{2g} \xrightarrow{\sim} A[3],$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{G}(L) & \longrightarrow & A[3] \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow \alpha & & \uparrow \tilde{\alpha} \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{H}(3) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/3)^{2g} \longrightarrow 0 \end{array}$$

De plus, l'isomorphisme  $\tilde{\alpha}$  est un isomorphisme symplectique par rapport aux formes bilinéaires  $e^L$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On appelle *structure de niveau 3* un isomorphisme symplectique  $\tilde{\alpha} : (\mathbb{Z}/3)^{2g} \rightarrow A[3]$ .

Considérons le demi-espace de Siegel

$$\mathcal{S}_g = \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid \tau^t \tau, \text{Im } \tau > 0\}$$

et le groupe modulaire de Siegel

$$\Gamma_g = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2g, \mathbb{Z}) \mid {}^t M \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

qui agit sur  $\mathcal{S}_g$  par

$$M : \tau \mapsto M_\tau := (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}.$$

Soit

$$\Gamma_g(3) = \{M \in \Gamma_g \mid M \equiv I_{2g} \pmod{3}\}$$

un sous-groupe de  $\Gamma_g$ . Deux éléments  $\tau$  et  $\tau'$  dans  $\mathcal{S}_g$  définissent des v.a.p.p. avec structure de niveau 3 si et seulement s'il existe  $M \in \Gamma_g(3)$  tel que  $\tau' = M_\tau$ . La variété complexe  $\mathcal{A}_g(3) := \mathcal{S}_g/\Gamma_g(3)$  paramètre donc les classes d'isomorphismes de v.a.p.p. de dimension  $g$  avec structure de niveau 3.

Le groupe  $\mathcal{G}(L)$  a une représentation naturelle dans l'espace  $V_A := H^0(A, L^3)$ , donnée par

$$((\varphi, \eta)s)(a) = \varphi_a(s(a + \eta)),$$

où  $a \in A$  et  $\varphi_a : t_\eta^*(L^3)_a \simeq (L^3)_{a+\eta} \rightarrow (L^3)_a$ .

D'un autre côté, si on note  $V(g)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de fonctions sur  $(\mathbb{Z}/3)^g$  à valeurs complexes, le groupe  $\mathcal{H}(3)$  agit linéairement sur  $V(g)$  par

$$((t, x, x^*)f)(v) = tx^*(v - x)f(v - x), \quad v \in (\mathbb{Z}/3)^g.$$

Ceci définit une représentation de  $\mathcal{H}(3)$  connue dans la littérature comme la représentation de Schrödinger. Toutes les représentations irréductibles du groupe de Heisenberg où le centre agit par multiplication sont isomorphes (proposition 3 [23]). Il existe donc un isomorphisme de représentations linéaires

$$\psi_\alpha : V(g) \rightarrow V_A.$$

Par le lemme de Schur cet isomorphisme est unique à scalaire près.

On considère le sous-groupe de  $\mathcal{H}(3)$

$$\mathcal{H}[3] := \{(t, x, x^*) \in \mathcal{H}(3) \mid t^3 = 1\}.$$

C'est une extension centrale non-triviale

$$1 \longrightarrow \mu_3 \longrightarrow \mathcal{H}[3] \longrightarrow (\mathbb{Z}/3)^{2g} \longrightarrow 1,$$

où  $\mu_3$  est le groupe des racines cubiques de l'unité. Par restriction,  $V(g)$  est une représentation linéaire de  $\mathcal{H}[3]$ . Pour chaque  $v \in (\mathbb{Z}/3)^g$  soit  $\delta_v \in V(g)$  la fonction caractéristique

$$\delta_v = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq v \\ 1 & \text{si } x = v. \end{cases}$$

On a donc

$$(t, x, x^*)\delta_v = tx^*(v - x)\delta_{v-x},$$

pour tout  $(t, x, x^*) \in \mathcal{H}[3]$ . Après avoir fixé un ordre dans  $(\mathbb{Z}/3)^g$ , on obtient une base canonique  $\{\delta_v\}_{v \in (\mathbb{Z}/3)^g}$  de  $V(g)$ . L'image de cette base par l'isomorphisme  $\psi_\alpha$  correspond à la base de fonctions thêta

$$\left\{ X_b := \vartheta \begin{bmatrix} b/3 \\ 0 \end{bmatrix} (3z; 3\tau), \quad b \in (\mathbb{Z}/3)^g, \quad z \in \mathbb{C}^g \right\}$$

de l'espace  $V_A$ , avec  $\tau \in \mathcal{S}$  fixé. On considère  $\varphi = \varphi_\tau : A \rightarrow \mathbb{P}(V_A^*)$  l'application définie par

$$z \mapsto (\dots, X_b(z), \dots)$$

correspondant au système linéaire  $|L^3|$ . Soit  $\varphi_\alpha$  la composée des applications

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}(V_A^*) \xrightarrow{t\psi_\alpha} \mathbb{P}(V(g)^*).$$

On observe que le groupe  $A[3] = \mathcal{G}(L)/\mathbb{C}^*$  agit par translations sur  $A$  et le groupe

$$\mathcal{H}[3]/\mu_3 = \mathcal{H}(3)/\mathbb{C}^* = (\mathbb{Z}/3)^{2g}$$

agit sur  $\mathbb{P}(V(g)^*)$  par le projectivisé de la représentation duale de  $\mathcal{H}[3]$  sur  $V(g)^*$ . Ces actions sont compatibles dans le sens où elles vérifient la relation

$$\varphi_\alpha(a + \eta) = \tilde{\alpha}^{-1}(\eta)\varphi_\alpha(a), \quad \forall \eta \in A[3], \quad a \in A.$$

Explicitement, l'action de  $\mathcal{H}[3]$  sur la base  $\{X_b\}$  est donnée par

$$(t, x, x^*)X_b = tx^*(b - x)X_{b-x},$$

pour tout  $(t, x, x^*) \in \mathcal{H}[3]$  et  $b \in (\mathbb{Z}/3)^2$ .

Dans la deuxième partie on utilisera seulement l'action du groupe de Heisenberg *fini*  $\mathcal{H}[3]$  et on le nommera simplement groupe de Heisenberg.

## 1.2 La cubique de Coble

Soit  $g = 2$ . Étant donnée une surface abélienne  $(A, L, \alpha)$ , principalement polarisée avec une structure thêta  $\alpha$ , le résultat de Coble assure l'existence d'une unique hypersurface cubique  $A[3]$ -invariante dans  $\mathbb{P}(V_A^*) \simeq \mathbb{P}^8$ , singulière le long de  $\varphi(A)$ . On cherche à expliciter l'équation de cette cubique. Pour cela on utilisera la base de fonctions thêta  $\{X_b\}$  de  $V_A$ .

Dans [5] (proposition 1), A. Beauville déduit que la dimension de l'espace des formes de degré 3  $\mathcal{H}[3]$ -invariantes dans  $V_A$  est égale à 5. Soient  $K := \{(1, x, 0) \mid x \in (\mathbb{Z}/3)^2\}$  et  $\widehat{K} := \{(1, 0, x^*) \mid x^* \in (\widehat{\mathbb{Z}/3})^2\}$  sous-groupes maximaux de  $\mathcal{H}[3]$ . Un monôme de la forme  $X_{\sigma_1}X_{\sigma_2}X_{\sigma_3}$ , avec  $\sigma_i \in (\mathbb{Z}/3)^2$  est  $\widehat{K}$ -invariant si et seulement si  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ . En faisant agir les éléments de  $K$  sur ce type de monômes et en prenant la somme, on obtient une base

de formes cubiques  $\mathcal{H}[3]$ -invariantes comme suit

$$\begin{aligned}
F_0 &:= \sum_{b \in (\mathbb{Z}/3)^2} X_b^3 \\
F_1 &:= \sum_b X_b X_{01+b} X_{02+b} \\
F_2 &:= \sum_b X_b X_{10+b} X_{20+b} \\
F_3 &:= \sum_b X_b X_{11+b} X_{22+b} \\
F_4 &:= \sum_b X_b X_{12+b} X_{21+b}.
\end{aligned}$$

Une cubique générale dans  $(S^3 V_A)^{\mathcal{H}[3]}$  est donc de la forme

$$(1.1) \quad F_\beta := \beta_0 F_0 + \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \beta_3 F_3 + \beta_4 F_4,$$

avec  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$  des coefficients complexes.

Par ailleurs, comme  $\varphi(A)$  est projectivement normal dans  $\mathbb{P}(V_A^*) \simeq \mathbb{P}^8$  [17], l'application  $H^0(\mathbb{P}^8, \mathcal{O}(2)) \rightarrow H^0(A, \mathcal{O}_A(2))$  est surjective et donc la dimension de l'espace de quadriques dans  $\mathbb{P}^8$  qui contiennent  $\varphi(A)$  est égale à

$$\begin{aligned}
\dim H^0(\mathbb{P}^8, \mathcal{I}_A(2)) &= \dim H^0(\mathbb{P}^8, \mathcal{O}(2)) - \dim H^0(A, \mathcal{O}_A(6\Theta)) \\
&= \binom{10}{2} - 6^2 \\
&= 9
\end{aligned}$$

où  $\mathcal{I}_A$  désigne le faisceau d'idéaux correspondant au plongement  $\varphi : A \hookrightarrow \mathbb{P}^8$ . Ainsi, par la proposition 1 [5], les dérivées partielles  $\left\{ \frac{\partial F_\beta}{\partial X_b} \right\}_{b \in (\mathbb{Z}/3)^2}$  forment une base pour l'espace des hypersurfaces quadriques contenant  $A$ . Coble avait conjecturé que ces quadriques suffisaient pour définir la surface  $A$ . Ce fait a été démontré par W. Barth dans [2] lorsque  $A$  est indécomposable. Ex-

plicitement,  $A$  est définie comme l'intersection des quadriques suivantes [2]

$$\begin{aligned}
Q_{00} &:= \beta_0 X_{00}^2 + \beta_1 X_{01} X_{02} + \beta_2 X_{10} X_{20} + \beta_3 X_{11} X_{22} + \beta_4 X_{12} X_{21} \\
Q_{01} &:= \beta_0 X_{01}^2 + \beta_1 X_{02} X_{00} + \beta_2 X_{11} X_{21} + \beta_3 X_{12} X_{20} + \beta_4 X_{10} X_{22} \\
Q_{02} &:= \beta_0 X_{02}^2 + \beta_1 X_{00} X_{01} + \beta_2 X_{12} X_{22} + \beta_3 X_{10} X_{21} + \beta_4 X_{11} X_{20} \\
Q_{10} &:= \beta_0 X_{10}^2 + \beta_1 X_{11} X_{12} + \beta_2 X_{20} X_{00} + \beta_3 X_{21} X_{02} + \beta_4 X_{22} X_{01} \\
Q_{11} &:= \beta_0 X_{11}^2 + \beta_1 X_{12} X_{10} + \beta_2 X_{21} X_{01} + \beta_3 X_{22} X_{00} + \beta_4 X_{20} X_{02} \\
Q_{12} &:= \beta_0 X_{12}^2 + \beta_1 X_{10} X_{11} + \beta_2 X_{22} X_{02} + \beta_3 X_{20} X_{01} + \beta_4 X_{21} X_{00} \\
Q_{20} &:= \beta_0 X_{20}^2 + \beta_1 X_{21} X_{22} + \beta_2 X_{00} X_{10} + \beta_3 X_{01} X_{12} + \beta_4 X_{02} X_{11} \\
Q_{21} &:= \beta_0 X_{21}^2 + \beta_1 X_{22} X_{20} + \beta_2 X_{01} X_{11} + \beta_3 X_{02} X_{10} + \beta_4 X_{00} X_{12} \\
Q_{22} &:= \beta_0 X_{22}^2 + \beta_1 X_{20} X_{21} + \beta_2 X_{02} X_{12} + \beta_3 X_{00} X_{11} + \beta_4 X_{01} X_{10}.
\end{aligned}$$

On donnera un bref aperçu du lien entre les paramètres  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$  et la surface abélienne  $A$  qui est l'intersection des quadriques ci-dessus. On considère l'involution  $\iota : a \mapsto -a$  sur  $A$  qui agit sur les coordonnées de  $V_A$  par

$$\iota \cdot X_b = X_{-b}, \quad b \in (\mathbb{Z}/3)^2.$$

Cette action induit une décomposition de  $\mathbb{P}^8$  dans un espace  $\mathbb{P}_+^4$   $\iota$ -invariante et un espace  $\mathbb{P}_-^3$   $\iota$ -anti-invariante. Soient

$$\begin{aligned}
Y_0 &:= X_{00} \\
Y_1 &:= \frac{1}{2}(X_{01} + X_{02}) & Z_1 &:= \frac{1}{2}(X_{01} - X_{02}) \\
Y_2 &:= \frac{1}{2}(X_{10} + X_{20}) & Z_2 &:= \frac{1}{2}(X_{10} - X_{20}) \\
Y_3 &:= \frac{1}{2}(X_{11} + X_{22}) & Z_3 &:= \frac{1}{2}(X_{11} - X_{22}) \\
Y_4 &:= \frac{1}{2}(X_{12} + X_{21}) & Z_4 &:= \frac{1}{2}(X_{12} - X_{21})
\end{aligned}$$

des coordonnées de  $\mathbb{P}_+^4$  et  $\mathbb{P}_-^3$  respectivement. Les 16 points de 2-torsion de  $A$  sont les seuls points fixes par l'involution  $\iota$ , donc

$$\begin{aligned}
A \cap \mathbb{P}_+^3 &= \{6 \text{ points de 2-torsion impairs}\} \\
A \cap \mathbb{P}_+^4 &= \{10 \text{ points de 2-torsion pairs}\}.
\end{aligned}$$

Dans les coordonnées  $Y_i$  et  $Z_j$  les quadriques  $Q_b$  prennent la forme [2]

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} Y_0^2 & Y_1^2 & Y_2^2 & Y_3^2 & Y_4^2 \\ Y_1^2 & Y_0 Y_1 & Y_3 Y_4 & Y_2 Y_4 & Y_2 Y_3 \\ Y_2^2 & Y_3 Y_4 & Y_0 Y_2 & Y_1 Y_4 & Y_1 Y_3 \\ Y_3^2 & Y_2 Y_4 & Y_1 Y_4 & Y_0 Y_3 & Y_1 Y_2 \\ Y_4^2 & Y_2 Y_3 & Y_1 Y_3 & Y_1 Y_2 & Y_0 Y_4 \end{pmatrix} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} 0 & -Z_1^2 & -Z_2^2 & -Z_3^2 & -Z_4^2 \\ Z_1^2 & 0 & -Z_3Z_4 & -Z_2Z_4 & -Z_2Z_3 \\ Z_2^2 & Z_3Z_4 & 0 & Z_1Z_4 & -Z_1Z_3 \\ Z_3^2 & Z_2Z_4 & -Z_1Z_4 & 0 & Z_1Z_2 \\ Z_4^2 & Z_2Z_3 & Z_1Z_3 & -Z_1Z_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \beta \\
& \begin{pmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} -\beta_1Z_1 & 2\beta_0Z_1 & \beta_3Z_4 - \beta_4Z_3 & \beta_4Z_2 - \beta_2Z_4 & \beta_2Z_3 - \beta_3Z_2 \\ -\beta_2Z_2 & -\beta_3Z_4 - \beta_4Z_3 & 2\beta_0Z_2 & \beta_1Z_4 + \beta_4Z_1 & \beta_1Z_3 - \beta_3Z_1 \\ -\beta_3Z_3 & -\beta_2Z_4 - \beta_4Z_2 & \beta_1Z_4 - \beta_4Z_1 & 2\beta_0Z_3 & \beta_1Z_2 + \beta_2Z_1 \\ -\beta_4Z_4 & -\beta_2Z_3 - \beta_3Z_2 & \beta_1Z_3 + \beta_3Z_1 & \beta_1Z_2 - \beta_2Z_1 & 2\beta_0Z_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les restrictions des quadriques  $Q_i$  à  $\mathbb{P}_-^3$  est données par

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -Z_1^2 & -Z_2^2 & -Z_3^2 & -Z_4^2 \\ Z_1^2 & 0 & -Z_3Z_4 & -Z_2Z_4 & -Z_2Z_3 \\ Z_2^2 & Z_3Z_4 & 0 & Z_1Z_4 & -Z_1Z_3 \\ Z_3^2 & Z_2Z_4 & -Z_1Z_4 & 0 & Z_1Z_2 \\ Z_4^2 & Z_2Z_3 & Z_1Z_3 & -Z_1Z_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} = (q_{ij}(Z)) \cdot \beta.$$

Les quadriques  $q_i$  définent l'application de *Steiner*  $\beta : \mathbb{P}_-^3 \rightarrow \mathbb{P}^4$  sur les points  $z \in \mathbb{P}_-^3$  tels que la matrice  $q_{ij}$  est de rang 4. L'application  $\beta$  envoie  $z$  sur le noyau de la matrice  $q_{ij}$ . Les 6 points de 2-torsion de l'intersection  $A \cap \mathbb{P}_-^3$  ont tous la même image par  $\beta$ , autrement dit  $\beta : \mathbb{P}_-^3 \rightarrow \mathbb{P}^4$  est de degré 6 sur son image. Coble a montré ([16] pag. 190) que l'image de cette application est la *quartique de Burkhardt*. La quartique de Burkhardt est la seule quartique dans  $\mathbb{P}^4$  invariante par l'action du groupe unitaire de réflexions  $\mathbb{P}Sp(4, \mathbb{Z}/3)$ .

Le théorème suivant (5.3.4 [16]) résume cette situation

**Théorème 1.2.1** *Il existe une application  $\mathbb{P}Sp(4, \mathbb{Z}/3)$ -équivariante et birégulière d'un ouvert de Zariski de la quartique de Burkhardt dans un ouvert de Zariski de l'espace de modules  $\mathcal{A}_{(3)}$*

Pour plus de détails sur les propriétés de la quartique de Burkhardt voir [16].



## Chapitre 2

# Preuve de la conjecture de Dolgachev

### 2.1 L'application $\theta$

Dans tout ce travail on considère une courbe projective  $C$  complexe non singulière de genre 2. Soit  $JC$  la jacobienne de  $C$  et  $J^1$  la variété (isomorphe à  $JC$ ) qui paramètre les fibrés en droites de degré 1 sur  $C$ . Dans la suite on notera  $h^0(\xi)$  au lieu de  $h^0(C, \xi)$  pour tout fibré  $\xi$  sur  $C$ . Soit  $\Theta$  le diviseur thêta canonique dans  $J^1$  défini ensemblistement par

$$\Theta = \{\xi \in J^1 \mid h^0(\xi) \geq 1\}.$$

On note  $\mathcal{M}$  l'espace des modules des fibrés vectoriels semi-stables de rang 3 avec déterminant trivial. C'est une variété projective, dont les points peuvent être identifiés avec les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels qui sont des sommes directes de fibrés vectoriels stables de degré 0.

On considère l'application

$$\theta : \mathcal{M} \longrightarrow |3\Theta| \simeq \mathbb{P}^8$$

qui associe à un fibré  $E$  le diviseur de support

$$\Theta_E := \{\xi \in J^1 \mid H^0(C, \xi \otimes E) \neq 0\}.$$

On vérifie que  $\Theta_E \in |3\Theta|$  (c.f. §2 [3]) et par le corollaire 1.7.4. [30], l'application  $\theta$  est bien définie. Cette application a été étudiée pour des courbes de genre  $g \geq 2$  et de rang  $r = 2$  dans [3] et [27] et pour un rang quelconque dans [6] et [4].

Pour tout fibré en droites  $L \in J^1$  on définit

$$\Theta_L = \{E \in \mathcal{M} \mid h^0(E \otimes L) \geq 1\}.$$

Il s'avère que  $\Theta_L$  est un diviseur de Cartier dans  $\mathcal{M}$  [12]. Le fibré en droites associé  $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\Theta_L)$  ne dépend pas du choix de  $L$  ; il est appelé le *fibré déterminant*. Le partie *i*) du théorème suivant montre qu'il est canonique.

**Théorème 2.1.1** [12]

- i) Le groupe de Picard  $\text{Pic}(\mathcal{M})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , engendré par  $\mathcal{O}(\Theta_L)$ .*
- ii) Le faisceau canonique de  $\mathcal{M}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}(-6\Theta_L)$ .*

Remarque : Le diviseur  $\Theta_L$  est connu dans la littérature comme le *diviseur thêta généralisé* puisque dans le cas  $n = 1$  la définition correspond au diviseur thêta dans  $J^1$ . De même, par analogie avec les fibrés de rang 1, les sections du fibré  $\mathcal{L}^k$  sont souvent appelées *fonctions thêta généralisées*.

**Théorème 2.1.2** *Il existe un isomorphisme canonique (à un scalaire près)*

$$H^0(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} H^0(J^1, \mathcal{O}_{J^1}(3\Theta))^*,$$

qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & |\mathcal{L}|^* \\ & \nearrow \varphi_{\mathcal{L}} & \downarrow \wr \\ \mathcal{M} & & |3\Theta| \\ & \searrow \theta & \end{array}$$

Le théorème 2.1.2 est démontré en général dans [6] pour  $g \geq 2$  et pour un rang quelconque. Il en découle que  $\mathcal{L} = \theta^*\mathcal{O}(1)$ , où  $\mathcal{O}(1)$  est le fibré tautologique dans  $|3\Theta| \simeq \mathbb{P}^8$ .

**Lemme 2.1.1** *L'application  $\theta$  est de degré 2.*

*Démonstration* : Le degré de  $\theta$  est égal au nombre d'intersection  $c_1(\mathcal{L})^8$ . Pour calculer ce nombre d'intersection on utilisera la formule de Verlinde qui donne la dimension des espaces vectoriels  $H^0(\mathcal{M}, \mathcal{L}^k)$ .

**Proposition 2.1.1** [31] [32] *Formule de Verlinde pour  $n = 3$ ,  $g = 2$ .*

$$\dim H^0(\mathcal{M}, \mathcal{L}^k) = 3 \left( \frac{k+3}{8} \right)^2 V_{1,1,1}(k+3)$$

où

$$V_{l,m,n}(k) = \sum_{\substack{a,b \geq 0 \\ a+b \leq k}} \left( \sin \frac{\pi a}{k} \right)^{-2l} \left( \sin \frac{\pi b}{k} \right)^{-2m} \left( \sin \frac{\pi(a+b)}{k} \right)^{-2n}$$

pour  $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ .

Le terme de droite de cette formule est un polynôme en  $k$  et son coefficient dominant est  $\frac{c_1(\mathcal{L})^8}{8!}$ . Dans son article (c.f. §2 [32]) Zagier donne une formule, en termes de nombres de Bernoulli, pour le coefficient dominant de  $V_{h,h,h}$ , avec  $h = g - 1$  :

$$v_{h,h,h} = (-1)^h 2^{6h} \sum_{r=0}^h \binom{4h-2r-1}{2h-1} \frac{B_{2r}}{(2r)!} \frac{B_{6h-2r}}{(6h-2r)!}.$$

Pour  $h = 1$  on obtient  $v_{1,1,1} = \frac{2^4}{3(7)!}$  et donc  $c_1(\mathcal{L}) = 2$ .

□

Le lemme 2.1.1 a été prouvé d'une autre façon par Y. Laszlo dans [19] (Section V.). Notons  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$  le lieu de ramification de l'application  $\theta$ .

**Lemme 2.1.2** *L'hypersurface  $\mathcal{B}$  est de degré 6.*

*Démonstration :* Comme  $\theta$  est un revêtement double sur  $\mathbb{P}^8$  il existe un fibré en droites  $\mathcal{O}(\delta)$  sur  $\mathbb{P}^8$  tel que

$$\theta_* \mathcal{O}_{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^8} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^8}(-\delta),$$

et donc  $\mathcal{B} \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^8}(2\delta)|$ . On sait que dans cette situation (Lemme 17.1 [1]) on a la relation suivante

$$K_{\mathcal{M}} = \theta^*(K_{\mathbb{P}^8} + \delta),$$

où  $K_{\mathcal{M}}$  et  $K_{\mathbb{P}^8}$  désignent les diviseurs canoniques de  $\mathcal{M}$  et  $\mathbb{P}^8$ . Par le théorème 2.1.1 i) on a

$$\theta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^8}(K_{\mathbb{P}^8} + \delta)) \simeq \theta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^8}(\delta - 9)) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(-6\Theta_L),$$

d'où on en déduit  $\delta = 3$  et donc que  $\mathcal{B}$  est de degré 6.

□

## 2.2 Le lieu de ramification de l'application $\theta$

Le but de cette section est de décrire le lieu de ramification  $\mathcal{B}$  en termes d'une certaine involution sur  $\mathcal{M}$ . Soit  $\iota : C \rightarrow C$  l'involution hyperelliptique. On note  $\mathfrak{i}$  l'involution sur  $\mathcal{M}$  définie par

$$\mathfrak{i} : E \mapsto \iota^* E^*,$$

où  $E$  est un représentant d'une classe d'isomorphisme de fibrés semi-stables et  $E^*$  son fibré dual.

**Proposition 2.2.1** *L'involution  $\mathfrak{i}$  commute avec l'application  $\theta$ .*

*Démonstration* : Il suffit de démontrer, au niveau des supports de diviseurs, que  $\Theta_{\iota^*E^*} = \Theta_E$ . D'abord, observons que

$$\begin{aligned}\iota^*\Theta_E &= \{\iota^*\xi \in J^1 \mid h^0(E \otimes \xi) \neq 0\} \\ &= \{\xi \in J^1 \mid h^0(E \otimes \iota_*\xi) \neq 0\} \\ &= \{\xi \in J^1 \mid h^0(\iota^*E \otimes \xi) \neq 0\} \\ &= \Theta_{\iota^*E}.\end{aligned}$$

Rappelons que l'involution  $\iota^*$  restreinte à  $J^1$  est donnée par  $\xi \mapsto \xi^{-1} \otimes \omega_C$ , où  $\omega_C$  est le fibré canonique sur  $C$ . Comme  $\chi(E^* \otimes \xi) = 0$  on a

$$\begin{aligned}\Theta_{E^*} &= \{\xi \in J^1 \mid h^0(E^* \otimes \xi) \neq 0\} \\ &= \{\xi \in J^1 \mid h^0(E \otimes \xi^{-1} \otimes \omega_C) \neq 0\} \\ &= \{\xi \in J^1 \mid h^0(E \otimes \iota^*\xi) \neq 0\} \\ &= \iota^*\Theta_E.\end{aligned}$$

Ainsi on obtient que

$$\Theta_{\iota^*E^*} = \iota^*\Theta_{E^*} = (\iota^* \circ \iota^*)\Theta_E = \Theta_E.$$

□

Pour conclure que  $\mathbf{i}$  est l'involution associée au revêtement double  $\theta$ , il faut montrer que cette involution n'est pas triviale. Pour cela on va exhiber un fibré  $E \in \mathcal{M}$  tel que  $\mathbf{i}(E) \not\cong E$ .

On considère un fibré vectoriel  $F$  sur  $C$  de rang 2 et de degré 1. On note  $W = \underline{\text{End}}F$  le fibré d'endomorphismes de  $F$  et  $W_0 = \underline{\text{End}}_0F$  le noyau de l'application trace

$$\text{Tr} : W \rightarrow \mathcal{O}_C,$$

i.e.  $W_0$  est le fibré des endomorphismes de  $F$  de trace nulle. Donc  $\text{rg } W_0 = 3$  et  $\det W_0 \simeq \mathcal{O}_C$ .

On cherche un fibré  $F$  tel que  $W_0$  soit stable parce que dans ce cas la S-équivalence dans  $\mathcal{M}$  coïncide avec l'isomorphisme de fibrés. Soit  $\mathcal{S}_{2,\lambda}$  l'espace des modules de classes d'équivalence de fibrés stables de rang 2, avec déterminant isomorphe à  $\lambda$ , supposé de degré 1.

**Lemme 2.2.1** *Soit  $F \in \mathcal{S}_{2,\lambda}$ , pour que  $\underline{\text{End}}_0(F)$  soit stable il faut et il suffit que  $F$  ne soit pas isomorphe à  $F \otimes \alpha$  pour tout  $\alpha \in JC[2]$  non nul.*

*Démonstration* : Soit  $F \in \mathcal{S}_{2,\lambda}$ . Supposons que  $\underline{\text{End}}_0(F)$  n'est pas stable. Donc, il contient un sous-fibré  $L$  tel que  $\deg L \geq 0$  et  $\text{rg } L < 3$ . Supposons  $\text{rg } L = 2$ . Observons que

$$\underline{\text{End}}(F)^* \simeq \underline{\text{End}}(F^*) \simeq \underline{\text{End}}(F),$$

d'où il découle que  $\underline{\text{End}}_0(F)^* \simeq \underline{\text{End}}_0(F)$ . En prenant le dual de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \underline{\text{End}}_0(F) \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

où  $Q$  est le fibré quotient de rang 1, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow \underline{End}_0(F) \longrightarrow L^* \longrightarrow 0.$$

Comme  $\deg Q^* = -\deg Q = \deg L$  on peut donc supposer que  $L$  est un fibré en droites. Le morphisme injectif non nul  $L \hookrightarrow \underline{End}_0(F)$  induit un homomorphisme

$$u : F \longrightarrow F \otimes L^{-1},$$

non nul de trace nulle. Comme  $F$  est stable, le morphisme  $u$  est nécessairement un isomorphisme ; alors  $F \simeq F \otimes L^{-1}$  et on a

$$\lambda \simeq \Lambda^2 F \simeq \Lambda^2(F \otimes L^{-1}) \simeq \lambda \otimes L^{-2},$$

donc  $L^2 \simeq \mathcal{O}_C$ , i.e.,  $L \in JC[2]$ . L'hypothèse sur  $F$  entraîne  $L \simeq \mathcal{O}_C$ , donc  $u$  est un endomorphisme de  $F$ . Par ailleurs, les endomorphismes d'un fibré stable sont des homothéties ; or, comme  $u$  est de trace nulle, il est nécessairement l'homomorphisme nul, ce qui nous donne une contradiction.

Supposons qu'il existe  $\alpha \in JC[2]$  non nul tel que  $u : F \otimes \alpha \xrightarrow{\sim} F$ . Donc  $u$  induit un morphisme injectif  $\alpha \rightarrow \underline{End}(F) = \mathcal{O}_C \oplus \underline{End}_0(F)$ , dont la projection sur  $\mathcal{O}_C$  est nulle car  $\alpha$  est non trivial. Donc  $\alpha$  est un sous-fibré de  $\underline{End}_0(F)$ , ce qui contredit la stabilité de  $\underline{End}_0(F)$ .

□

Étant donné un groupe algébrique  $G$  on note  $\mathcal{O}G$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $C$  à valeurs dans  $G$ . Alors les classes d'isomorphisme de  $G$ -fibrés sur  $C$  sont paramétrisées par le groupe de cohomologie de Čech  $H^1(C, \mathcal{O}G)$ . Dans notre situation on a la suite exacte (2.7 [29])

$$(2.1) \quad 0 \longrightarrow \text{Pic}(C) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}GL_2) \xrightarrow{\pi} H^1(C, \mathcal{O}SO_3) \longrightarrow 0,$$

où l'application  $\pi$  est donnée par  $F \mapsto \underline{End}_0(F)$ . Prenons  $F \in \mathcal{S}_{2,\lambda}$ . On a donc

$$\iota^* \underline{End}_0(F) \simeq \underline{End}_0(\iota^* F).$$

Supposons  $\underline{End}_0(\iota^* F) \simeq \underline{End}_0(F)$ . Donc, par la suite (2.1), il existe  $\alpha \in \text{Pic}(C)$  tel que

$$\iota^* F \simeq F \otimes \alpha.$$

On a donc

$$\iota^* \lambda \simeq \Lambda^2 \iota^* F \simeq \Lambda^2(F \otimes \alpha) \simeq \lambda \otimes \alpha^2.$$

En choisissant  $\lambda$  tel que  $\iota^* \lambda \simeq \lambda$  on en déduit que  $\alpha \in JC[2]$ . Il suffit donc, pour que l'involution  $i$  soit non triviale, de démontrer qu'il existe un fibré  $F \in \mathcal{S}_{2,\lambda}$  tel que  $\iota^* F \not\simeq F \otimes \alpha$ , pour tout  $\alpha \in JC[2]$ . Pour montrer l'existence d'un tel fibré dans  $\mathcal{S}_{2,\lambda}$  on va utiliser la description du groupe de automorphismes de  $\mathcal{S}_{2,\lambda}$  donnée par Newstead dans son article [28].

### 2.3 Les automorphismes de $\mathcal{S}_{2,\lambda}$

Newstead utilise une description géométrique de l'espace de modules  $\mathcal{S}_{2,\lambda}$  pour expliciter ses automorphismes. On considère le groupe

$$G := \{(\rho, M) \mid \rho \in \text{Aut}(C), M \in \text{Pic}(C) \text{ avec } M^2 \simeq \lambda \otimes (\rho^*\lambda)^*\}$$

On munit  $G$  d'une structure de groupe donnée par

$$(\rho_1, M_1) \cdot (\rho_2, M_2) = (\rho_1 \circ \rho_2, M_2 \otimes \rho_2^*(M_1)).$$

Le groupe  $G$  agit sur  $\mathcal{S}_{2,\lambda}$  à droite par

$$F \cdot (\rho, M) = (\rho^*(F) \otimes M),$$

pour tout  $F \in \mathcal{S}_{2,\lambda}$ . On observe que

$$\det(\rho^*(F) \otimes M) \simeq \rho^*(\lambda) \otimes M^2 \simeq \lambda.$$

On peut donc définir un homomorphisme naturel  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{S}_{2,\lambda})$  par

$$(\rho, M) \mapsto \{F \mapsto \rho^*(F) \otimes M\}.$$

**Théorème 2.3.1** [28] *L'application  $\Phi$  est un isomorphisme de groupes.*

Par le théorème 2.3.1 l'automorphisme de  $\mathcal{S}_{2,\lambda}$  donné par  $F \mapsto \iota^*F \otimes \alpha$  n'est pas l'identité. Par conséquent, il existe un fibré  $F \in \mathcal{S}_{2,\lambda}$  tel que  $\iota^*F \not\cong F \otimes \alpha$  pour tout  $\alpha \in JC[2]$ .

On a donc démontré la proposition suivante

**Proposition 2.3.1** *L'involution associée au revêtement  $\theta$  est  $i : E \mapsto \iota^*E^*$ .*

**Corollaire 2.3.1** *L'hypersurface sextique de ramification  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$  est définie par*

$$\mathcal{B} = \{E \in \mathcal{M} \mid E^* \sim_s \iota^*E\}.$$

### 2.4 Calcul du degré de la variété duale $\mathcal{C}^*$

On cherche à calculer le degré de l'hypersurface  $\mathcal{C}^*$ , l'hypersurface duale de la cubique de Coble. Soit  $\mathcal{D} : |3\Theta|^* \dashrightarrow |3\Theta| \cong \mathbb{P}^{8*}$  l'application rationnelle définie par les dérivées partielles de  $\mathcal{C}$ , i.e.,

$$\mathcal{D} : x \mapsto \left[ \frac{\partial F}{\partial X_0}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial X_8}(x) \right],$$

où  $F = 0$  est l'équation qui définit la cubique de Coble. La variété duale de  $\mathcal{C}$  est par définition l'adhérence de l'image de la partie lisse de  $\mathcal{C}$  par l'application  $\mathcal{D}$ .

Soit  $(A, L)$  une surface abélienne complexe principalement polarisée. Il est

connu que l'idéal de la surface  $A$  plongée dans  $\mathbb{P}^8$  par le fibré très ample  $L^{\otimes 3}$  est engendré par des quadriques et des cubiques. Barth a démontré [2] que le faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}_{A/\mathbb{P}^8}$  est engendré par les quadriques qui s'annulent en  $A$  lorsque  $A$  n'est pas le produit de courbes elliptiques.

Dans notre cas,  $J^1 (\simeq JC)$  est défini schématiquement par les dérivées partielles de  $\mathcal{C}$ , i.e.  $J^1$  est le lieu singulier de la cubique de Coble où l'application  $\mathcal{D}$  n'est pas définie. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & \tilde{\mathbb{P}}^8 \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ J^1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^8 \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow f \\ \xrightarrow{\mathcal{D}} \end{array} \quad \mathbb{P}^{8*}$$

où  $\pi : \tilde{\mathbb{P}}^8 \rightarrow \mathbb{P}^8$  est l'éclatement de  $\mathbb{P}^8$  le long de  $J^1$  et  $E$  est le diviseur exceptionnel. Ici on a pris le plongement  $i$  comme celui défini par le fibré en droites  $\mathcal{O}(3\Theta)$  sur  $J^1$ . Soit  $h = i^*\mathcal{O}(1)$ , on a donc  $h^2 = 9(\Theta \cdot \Theta) = 18$ .

Soit  $e = [E]$  la classe du diviseur exceptionnel dans  $\tilde{\mathbb{P}}^8$  et  $H$  la classe d'un hyperplan dans  $\mathbb{P}^8$ ; on note  $\tilde{H} := \pi^*H$ . Par la proposition 4.4 [13] on a

$$d \cdot \deg(\mathcal{C}^*) = \int_{\pi^{-1}(\mathcal{C})} c_1(f^*\mathcal{O}(1))^7,$$

où  $d$  est le degré générique de l'application  $\mathcal{D}$ . Soit  $N = N_{J^1}\mathbb{P}^8$  le fibré normal. Étant donné que le fibré tangent à  $J^1$  est trivial, les classes de Chern totales de  $N$  et de  $i^*T_{\mathbb{P}^8}$  sont égales. On a donc

$$c(N) = c(i^*T_{\mathbb{P}^8}) = (1 + h)^9 = 1 + 9h + 36h^2.$$

On note  $\xi := c_1(\mathcal{O}_E(-1)) = e|_E$  et  $\tilde{h} := \pi^*(h)$ . Par le lemme 3.2. [13] on a

$$c_6(\pi^*N \otimes \mathcal{O}_E(1)) = \sum_{i=0}^6 c_1(\mathcal{O}_E(1))^i c_{6-i}(\pi^*N) = 0,$$

d'où

$$(2.2) \quad \xi^6 - 9\tilde{h}\xi^5 + 36\tilde{h}^2\xi^4 = 0.$$

À l'aide de cette relation on va calculer les produits  $\tilde{H}^r \cdot e^{8-r}$  pour  $0 \leq r \leq 8$ , dont on aura besoin pour le calcul du degré.

On observe d'abord que  $\tilde{h}^2\xi^5 = -18$  car  $h^2 = 18$ . Donc, en multipliant (2.2) par  $\tilde{h}$ , on obtient

$$\tilde{h}\xi^6 - 9\tilde{h}^2\xi^5 = 0,$$

et donc  $\xi^6\tilde{h} = -162$ . En multipliant (1) par  $\xi$  on a

$$\xi^7 - 9\tilde{h}\xi^6 + 36\tilde{h}^2\xi^5 = 0,$$

d'où  $\xi^7 = 36(18) - 9(162) = -810$ . On a

$$\tilde{H}^r \cdot e^{8-r} = (\tilde{h}^r \cdot \xi^{8-r-1})_E.$$

Observons que la transformée stricte de  $\mathcal{C}$  dans  $\tilde{\mathbb{P}}^8$  correspond au diviseur  $3\tilde{H} - 2e$  puisque le lieu singulier de  $\mathcal{C}$  est de multiplicité 2 dans  $\mathcal{C}$ . En utilisant le fait que  $\tilde{h}^r = 0$  pour  $r \geq 3$  il en résulte

$$\begin{aligned} \int_{\pi^{-1}(\mathcal{C})} c_1(f^*\mathcal{O}(1))^7 &= (3\tilde{H} - 2e)(2\tilde{H} - e)^7 \\ &= -3\tilde{H}e^7 + 210\tilde{H}^2e^6 + 2e^8 - 28\tilde{H}e^7 + 384\tilde{H}^8 \\ &= -31\tilde{h}\xi^6 + 210\tilde{h}^2\xi^5 + 2\xi^7 + 384 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\deg(\mathcal{C}^*) \leq 6$ . On vérifiera ultérieurement (c.f. section 2.7 (2.6)) que  $d = 1$ , i.e.  $\deg(\mathcal{C}^*) = 6$ .

## 2.5 L'application duale sur les sécantes de $J^1$

Considérons  $\mathcal{D} : \mathbb{P}^8 \dashrightarrow \mathbb{P}^{8*}$  l'application duale, qui n'est pas définie sur le lieu singulier de  $\mathcal{C}$ . Considérons  $J^1 = \text{Sing } \mathcal{C}$  plongée dans  $\mathbb{P}^8$  par le système linéaire  $|3\Theta|$ . On note  $Q_i := \frac{\partial F}{\partial X_i}$  et  $\tilde{Q}_i$  les formes bilinéaires associées, avec  $i = 0, \dots, 8$ . On prend  $a, b \in J^1$  et on considère la sécante  $\ell$  de  $J^1$  qui passe par  $a$  et  $b$ . Puisque  $\mathcal{C}$  est singulière le long de  $J^1$ , la multiplicité de l'intersection  $\ell \cap \mathcal{C}$  est au moins 4, ce qui entraîne que la droite  $\ell$  est contenue dans  $\mathcal{C}$ .

**Lemme 2.5.1** *L'application duale  $\mathcal{D}$  est constante le long de la droite  $\ell$ , i.e. tous les points de  $\ell$  autres que  $a, b$  ont le même hyperplan tangent à la cubique  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration :* On écrit  $p = a + tb \in \ell$  pour  $t \in \mathbb{C}$ . On a donc  $\mathcal{D}(p) = \mathcal{D}(a + tb) = [\tilde{Q}_0(a + tb, a + tb), \dots, \tilde{Q}_8(a + tb, a + tb)]$ . En développant la forme  $\tilde{Q}_i(a + tb, a + tb)$  on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i(a + tb, a + tb) &= \tilde{Q}_i(a, a) + t^2\tilde{Q}_i(b, b) + 2t\tilde{Q}_i(a, b) \\ &= 2t\tilde{Q}_i(a, b) \end{aligned}$$

pour tout  $i = 0, \dots, 8$ . Donc l'application  $\mathcal{D}$  ne dépend que de  $a$  et  $b$  sur la droite sécante. □

Remarque : Observons que par le lemme précédent l'application duale  $\mathcal{D}$  n'est pas bijective sur les points lisses de la droite  $\ell$ . Or, comme  $\mathcal{C}^{**} \simeq \mathcal{C}$ , l'application duale sur  $\mathcal{C}^*$  n'est pas définie sur l'image de  $\ell$  par  $\mathcal{D}$ , ce qui



implique que  $\mathcal{D}$  envoie  $\ell$  sur un point singulier de  $\mathcal{C}^*$ .

Soit  $\tilde{F}$  la forme trilinéaire associée à la cubique  $\mathcal{C}$ . Donc, l'équation linéaire  $\tilde{F}(a, b, \cdot) = 0$  pour  $a, b \in J^1, a \neq b$ , définit l'hyperplan tangent à la cubique en un point  $p$  lisse sur la droite  $a \cdot b$ . Autrement  $\tilde{F}(a, a, \cdot) \equiv 0$ . On notera  $\varphi : J^1 \times J^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^{8*} \simeq |3\Theta|$  l'application définie par

$$(a, b) \mapsto \{\tilde{F}(a, b, \cdot) = 0\}.$$

On pose  $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{J^1}(3\Theta)$  et  $V := H^0(J^1, \mathcal{L})^*$ . On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} J^1 \times J^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(V^*) \\ & \searrow \phi & \uparrow \gamma \\ & & \mathbb{P}(V \otimes V) \end{array}$$

où  $\phi$  est l'application définie par le système linéaire  $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L} := p_1^*(\mathcal{L}) \otimes p_2^*(\mathcal{L})$  et  $\gamma$  est l'application linéaire donnée par la forme trilinéaire  $\tilde{F}$ . Donc,  $\varphi$  est définie par un sous-système linéaire de  $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}$ .

**Proposition 2.5.1** *L'image de  $\varphi$  dans  $|3\Theta| \simeq \mathbb{P}(V^*)$  est non-dégénérée.*

*Démonstration :* L'action du groupe  $A[3]$  sur  $J^1$  induit une action sur  $J^1 \times J^1$  par  $\eta \cdot (a, b) = (a + \eta, b + \eta)$ . Comme  $\phi$  et  $\gamma$  sont  $\mathcal{H}[3]$ -équivariantes, alors  $\varphi$  est aussi  $\mathcal{H}[3]$ -équivariante. Soit  $\mathbb{P}(W)$  l'hyperplan engendré par les éléments de l'image de  $\varphi$ , avec  $W \subset H^0(J^1, \mathcal{L})$ . On en déduit que  $W$  est un sous-espace stable par l'action du groupe de Heisenberg. Mais on sait que  $H^0(J^1, \mathcal{L})$  est une représentation irréductible de  $\mathcal{H}[3]$  alors soit  $W = 0$ , soit  $W = V^*$ . Cela entraîne que l'image de  $\varphi$  est non-dégénérée.  $\square$

Dans la suite pour  $x \in \text{Pic}(C)$ , on notera  $\Theta_x$  le diviseur thêta translaté  $t_x^* \Theta$ .

**Lemme 2.5.2** *Soit  $C$  une courbe de genre 2 et soient  $a, b \in \text{Pic}^1(C) = J^1$  distincts. Il existe exactement deux translatés du diviseur thêta  $\Theta_x$  et  $\Theta_y$ , avec  $x, y \in JC$ , tels que  $\Theta_x \cap \Theta_y = \{a, b\}$ .*

*Démonstration :* Calculer le nombre de diviseurs linéairement équivalents à  $\Theta$  qui passent par  $a$  et  $b$  équivaut à calculer le produit d'intersection

$$(\Theta_a \cdot \Theta_b) = (\Theta \cdot \Theta) = 2g - 2 = 2.$$

Soit  $\alpha : C \rightarrow \text{Pic}^1(C)$  le plongement canonique. Puisque l'application  $C^{(2)} \rightarrow JC$  définie par

$$(p, q) \mapsto \mathcal{O}_C(p - \iota q) = \alpha(p) - \alpha(\iota q)$$

est surjective il existe  $p, q \in C$  tels que  $a - b = \mathcal{O}_C(p - \iota q)$ . En posant  $x = \alpha(p) - a$  et  $y = \alpha(\iota p) - b$ , on vérifie que  $\Theta_x \cap \Theta_y = \{a, b\}$ .

□

Remarque : La propriété énoncée dans le lemme 2.5.2 est symétrique de celle-ci : pour tout  $x, y \in JC$ ,  $x \neq y$  il existe exactement deux translatés  $\Theta_a$  et  $\Theta_b$  avec  $a, b \in \text{Pic}^1(C)$  tels que  $\Theta_a \cap \Theta_b = \{x, y\}$ .

Grâce au lemme 2.5.2 on peut définir une application rationnelle  $\psi : J^1 \times J^1 \dashrightarrow |3\Theta|$  par

$$(a, b) \mapsto \Theta_x + \Theta_y + \Theta_{-x-y},$$

où  $\Theta_x \cap \Theta_y = \{a, b\}$ . Comme pour  $\varphi$  cette application n'est pas définie sur la diagonale  $\Delta \subset J^1 \times J^1$ . Considérons les applications  $\tilde{\psi}$  et  $\beta$  définies sur  $J^1 \times C^{(2)}$  par

$$\tilde{\psi} : (a, p+q) \mapsto \Theta_{\alpha(p)-a} + \Theta_{\alpha(q)-a} + \Theta_{2a-\alpha(p)-\alpha(q)} \in |3\Theta|,$$

et

$$\beta : (a, p+q) \mapsto (a, a + \omega_C - \alpha(p) - \alpha(q)) \in J^1 \times J^1,$$

où  $\omega_C$  désigne le fibré canonique.

**Lemme 2.5.3** *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} J^1 \times C^{(2)} & & \\ \beta \downarrow & \searrow \tilde{\psi} & \\ J^1 \times J^1 & \xrightarrow{\psi} & |3\Theta| \end{array}$$

commute. De plus, l'application  $\beta$  est l'éclatement de  $J^1 \times J^1$  le long de la diagonale  $\Delta$ .

*Démonstration* : Soit  $(a, p+q) \in J^1 \times C^{(2)}$ . À l'aide du lemme 2.5.2 on a

$$\begin{aligned} \psi \circ \beta(a, p+q) &= \psi(a, a + \omega_C - \alpha(p) - \alpha(q)) \\ &= \Theta_{\alpha(p)-a} + \Theta_{\alpha(q)-a} + \Theta_{2a-\alpha(p)-\alpha(q)} \\ &= \tilde{\psi}(a, p+q), \end{aligned}$$

pour  $p \neq \iota q$ . Le morphisme  $\pi : C^{(2)} \rightarrow JC$  donné par  $\pi : p+q \mapsto \omega_C - \alpha(p) - \alpha(q)$  est l'éclatement de  $J^1 \times J^1$  en 0. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & J^1 \times C^{(2)} & \\ \text{Id} \times \pi \swarrow & \downarrow \beta & \\ J^1 \times JC & \xrightarrow{\gamma} & J^1 \times J^1 \end{array}$$

avec  $\gamma$  l'isomorphisme donné par  $(a, \xi) \mapsto (a, a + \xi)$ . On en déduit que  $\beta$  est l'éclatement de la  $J^1 \times J^1$  le long de la diagonale.

□

**Proposition 2.5.2** *L'image de  $\psi$  dans  $|3\Theta|$  est non-dégénérée.*

*Démonstration :* À l'aide du lemme 2.5.2, on obtient que

$$\psi(a + \eta, b + \eta) = \Theta_{x+\eta} + \Theta_{y+\eta} + \Theta_{-x-y-2\eta} = t_\eta \cdot \psi(a, b).$$

L'image de  $\psi$  dans  $\mathbb{P}H^0(J^1, \mathcal{L})$  engendre donc un sous-espace stable par l'action du groupe de Heisenberg, donc égal à  $\mathbb{P}H^0(J^1, \mathcal{L})$ .

□

**Lemme 2.5.4** *On fixe  $b \in J^1$ . Alors  $\psi^*\mathcal{O}(1)|_{J^1 \times \{b\}} \in |3\Theta|$ .*

*Démonstration :* Soit  $c \in J^1$  fixé,  $c \neq b, c \neq \iota(b)$  où  $\iota$  est l'application induite par l'involution hyperelliptique, et soit  $H_c$  l'hyperplan dans  $|3\Theta|$  de tous les diviseurs qui passent par  $c$ . On a

$$\psi^*(H_c)|_{J^1 \times \{b\}} = \{a \in J^1 \mid c \in \Theta_x + \Theta_y + \Theta_{-x-y}, \text{ où } \Theta_x \cap \Theta_y = \{a, b\}\}.$$

On suppose donc  $b, c \in J^1$ . D'après le lemme 2.5.2 il existe  $z_1, z_2 \in JC$  tels que  $\Theta_{z_1} \cap \Theta_{z_2} = \{b, c\}$ . On prouvera l'égalité suivante

$$\psi^*(H_c)|_{J^1 \times \{b\}} = \Theta_{z_1} + \Theta_{z_2} + \Theta_{-z_1-z_2}.$$

On observe que pour tout  $a \in \Theta_{z_1} \cup \Theta_{z_2}$ , les diviseurs thêta tradatés qui s'intersectent en  $a$  et  $b$  contiennent tous  $c$  (c.f. Fig.2.1), donc  $\Theta_{z_1} + \Theta_{z_2} \subset \psi^*(H_c)|_{J^1 \times \{b\}}$ . On montrera que le diviseur  $\Theta_{-z_1-z_2}$  est contenu dans  $\psi^*(H_c)|_{J^1 \times \{b\}}$ .

Après une translation on peut supposer  $b, c \in \Theta \subset \text{Pic}^1(C)$ , i.e. ,  $z_1 = 0$  et

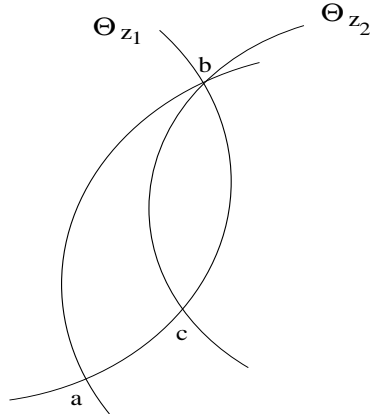


FIG. 2.1 –

$z_2 = \iota(c) - b = \iota(b) - c$ , tels que  $\Theta \cap \Theta_{z_2} = \{b, c\}$ . En effet,

$$b \in \Theta_{z_2} \Leftrightarrow b + z_2 = \iota(c) \in \Theta, \quad c \in \Theta_{z_2} \Leftrightarrow c + z_2 = \iota(b) \in \Theta.$$

Soit  $a \in \Theta_{-z_2}$ . On veut montrer que  $a \in \psi^*(H_c)|_{J^1 \times \{b\}}$ . Plus précisément, on montrera que  $c \in \Theta_{-x-y}$  où  $\Theta_x \cap \Theta_y = \{a, b\}$ . Il existe  $p \in C$  tel que  $x = \alpha(p) - a$  et  $y = \alpha(\iota p) - b$ . On a donc

$$\begin{aligned} a - z_2 &= a - \iota(c) + b \\ &= \alpha(p) - x + \alpha(\iota p) - y - \iota(c) \\ &= \omega_C - \iota(c) - x - y \\ &= c - x - y \in \Theta. \end{aligned}$$

On obtient ainsi  $c \in \Theta_{-x-y}$  (c.f Fig.2.2).

Soit  $a \in \psi^*(H_c)|_{J^1 \times \{b\}}$ . On veut démontrer que  $a \in \Theta_{z_1} + \Theta_{z_2} + \Theta_{-z_1-z_2}$  avec  $\{b, c\} = \Theta_{z_1} \cap \Theta_{z_2}$ . On a

$$c \in \Theta_x + \Theta_y + \Theta_{-x-y}, \quad \text{avec} \quad \{a, b\} = \Theta_x \cap \Theta_y.$$

Supposons  $c \in \Theta_x$ . Par le lemme 2.5.2 il existe exactement deux translatés du diviseur thêta passant par  $b$  et  $c$ , on peut donc supposer  $x = z_1$  et on obtient  $a \in \Theta_{z_1}$ . Si on suppose  $c \in \Theta_y$ , le même argument montre que  $a \in \Theta_{z_1}$ . Prenons  $c \in \Theta_{-x-y}$ . Pour simplifier, on peut supposer  $b, c \in \Theta$ , avec  $z_1 = 0$  et  $z_2 = \iota(c) - b$ . On montrera que  $a \in \Theta_{-z_2}$ . Il existe  $p \in C$  tel que  $x = \alpha(p) - a$  et  $y = \alpha(\iota p) - b$ . On a donc

$$\begin{aligned} c - x - y &= c - \alpha(p) + a - \alpha(\iota p) + b \\ &= c - \omega_C + b + a \\ &= c - \iota(b) + a \\ &= a - z_2 \in \Theta, \end{aligned}$$

et donc  $a \in \Theta_{-z_2}$ , ce qui démontre l'égalité requise.  $\square$

**Théorème 2.5.1** *Les applications rationnelles  $\varphi$  et  $\psi$  coïncident.*

*Démonstration :* Le lemme 2.5.4 implique que  $\psi$  est définie par un sous-système linéaire de  $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}$  et les propositions 2.5.1 et 2.5.2 montrent que les sous-systèmes qui définissent  $\varphi$  et  $\psi$  sont tous les deux de dimension 9, la dimension de  $V$ . On note  $\Gamma_\varphi, \Gamma_\psi$  ces sous-systèmes. On note  $B_s(\Gamma_\varphi)$  et  $B_s(\Gamma_\psi)$  les points base de  $\Gamma_\varphi$  et  $\Gamma_\psi$  respectivement. On montrera que la diagonale  $\Delta$  dans  $J^1 \times J^1$  est contenue dans ces lieux de base.

On fixe  $c \in \mathbb{P}(V)$  et soit  $H_c$  l'hyperplan associé dans  $|3\Theta|$ . Alors  $\varphi^{-1}(H_c) = \{(a, b) \mid \tilde{F}(a, b, c) = 0\}$  contient  $\Delta$ . En effet, vu que  $J^1 = \text{Sing } \mathcal{C}$ , alors  $F(x, x, \cdot) = 0$  pour tout  $x \in J^1$  et en particulier  $\tilde{F}(x, x, c) = 0 \forall x \in J^1$ . On a donc  $\Delta \subset B_s(\Gamma_\varphi)$ .

Dans le lemme 2.5.4 on a montré que pour  $c \in J^1$  fixé,

$$\psi^{-1}(H_c)|_{J^1 \times \{b\}} = \Theta_{z_1} + \Theta_{z_2} + \Theta_{-z_1-z_2},$$

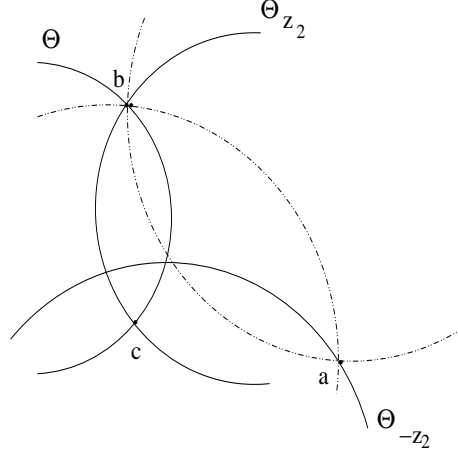


FIG. 2.2 –

où  $\Theta_{z_1} \cap \Theta_{z_2} = \{b, c\}$ . Pour tout  $b \in J^1$  on a donc  $b \in \psi^{-1}(H_c)|_{J^1 \times \{b\}}$  et ainsi  $\Delta \subset \psi^{-1}(H_c)$ . Cela est suffisant parce que les hyperplans  $H_c$ , avec  $c \in J^1$ , engendrent  $\mathbb{P}(V^*)$ .

On note  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux de  $\Delta$  en  $J^1 \times J^1$ . On a montré que  $\Gamma_\varphi, \Gamma_\psi \subset H^0(J^1 \times J^1, (\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{I})$ . On considère l'involution  $i : (a, b) \mapsto (b, a)$  sur  $J^1 \times J^1$ . On notera  $H^0(J^1 \times J^1, (\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{I})_+$  la partie  $i$ -invariante. Comme  $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$  et  $\psi(a, b) = \psi(b, a)$ , on a  $\Gamma_\varphi, \Gamma_\psi \subset H^0(J^1 \times J^1, (\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{I})_+$ . On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(J^1 \times J^1, (\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{I}) \longrightarrow H^0(J^1 \times J^1, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}) \xrightarrow{rest|_\Delta} H^0(\Delta, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}|_\Delta).$$

En utilisant la formule de Künneth et le fait que  $H^0(J^1, \mathcal{L}) \otimes H^0(J^1, \mathcal{L}) \simeq \bigwedge^2 H^0(J^1, \mathcal{L}) \oplus S^2 H^0(J^1, \mathcal{L})$  on observe que l'espace  $H^0(J^1 \times J^1, (\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{I})_+$  est contenu dans  $S^2 H^0(J^1, \mathcal{L})$ . Donc la suite ci-dessus restreinte à la partie  $i$ -invariante donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(J^1 \times J^1, (\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{I})_+ \longrightarrow S^2 H^0(J^1, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(J^1, \mathcal{L}^2) \longrightarrow 0,$$

où la surjectivité de la multiplication est assurée par la proposition 7.3.4. [20]. En calculant les dimensions de  $S^2 H^0(J^1, \mathcal{L})$  et  $H^0(J^1, \mathcal{L}^2)$  on trouve que la dimension de  $H^0(J^1 \times J^1, (\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{I})_+$  est égal à  $45 - 36 = 9$ . Ainsi on obtient que  $\Gamma_\varphi = \Gamma_\psi = H^0(J^1 \times J^1, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}(-\Delta))_+$ , donc  $\varphi$  et  $\psi$  sont définies par le même système linéaire. Il existe donc un isomorphisme  $\gamma$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{P}(V^*) \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \gamma \\ J^1 \times J^1 & & \mathbb{P}(V^*) \\ & \searrow \psi & \end{array}$$

commute. On sait que  $V^* = H^0(J^1, \mathcal{L})$  est la seule représentation irréductible du groupe de Heisenberg où  $\mu_3$  agit par multiplication. Puisque  $\varphi$  et  $\psi$  sont  $\mathcal{H}[3]$ -équivariantes, elles définissent des représentations irréductibles de  $\mathcal{H}[3]$ . Par le lemme de Schur l'application linéaire associée à  $\gamma$  est une homothétie. Donc  $\gamma = \text{Id}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

## 2.6 Sextiques planes

Considérons une courbe elliptique  $E$  et le plongement  $\varphi_3 : E \hookrightarrow \mathbb{P}^2$  défini par le fibré en droites  $\mathcal{O}_E(3 \cdot 0)$ . Soit  $\mathcal{H}[3] \simeq \mu_3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$  le groupe de Heisenberg associé à la polarisation  $\mathcal{O}_E(3 \cdot 0)$ . Comme l'application  $\varphi_3$  est  $\mathcal{H}[3]$ -équivariante, l'image est une cubique plane  $\mathcal{H}[3]$ -invariante. On peut choisir des coordonnées  $X_0, X_1, X_2$  de  $\mathbb{P}^2$  telles que  $\mathcal{H}[3]$  agit par

$$(2.3) \quad (t, x, x^*)X_b = tx^*(b - x)X_{b-x}$$

pour tout  $(t, x, x^*) \in \mathcal{H}[3]$ . Par rapport à ces coordonnées, l'image de  $\varphi_M$  est donnée par l'équation

$$f_\lambda := X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 - 3\lambda X_0 X_1 X_2 = 0,$$

connue comme la forme de Hesse de la cubique plane. Comme  $\mathcal{H}[3]$  agit sur les dérivées partielles de  $f_\lambda$ , les neuf points d'inflexion de la cubique forment une orbite du groupe  $\mathcal{H}[3]$ .

L'image de l'application

$$\mathcal{D} : [X_0, X_1, X_2] \mapsto \left[ \frac{\partial f_\lambda}{\partial X_0}, \frac{\partial f_\lambda}{\partial X_1}, \frac{\partial f_\lambda}{\partial X_2} \right]$$

est par définition la courbe duale de  $E$ . Dans le cas où  $E$  est lisse, la courbe duale est une sextique plane avec 9 points de rebroussement comme points singuliers, images des 9 points d'inflexion. Puisque cette application est  $\mathcal{H}[3]$ -équivariante, la sextique duale est invariante par  $\mathcal{H}[3]$  et ses points de rebroussement forment aussi une orbite du groupe de Heisenberg. Soient  $Y_i$  pour  $i = 0, 1, 2$ , les coordonnées homogènes de  $\mathbb{P}^{2*}$  induites par l'application  $\mathcal{D}$ .

Une fois qu'on a calculé la dimension de l'espace de sextiques planes  $\mathcal{H}[3]$ -invariantes, on peut donner une base explicite pour cet espace, à savoir

$$Y_0^6 + Y_1^6 + Y_2^6, Y_0^3 Y_1^3 + Y_0^3 Y_2^3 + Y_1^3 Y_2^3, Y_0 Y_1 Y_2 (Y_0^3 + Y_1^3 + Y_2^3), Y_0^2 Y_1^2 Y_2^2.$$

On écrit donc l'équation d'une sextique plane générale  $\mathcal{H}[3]$ -invariante comme

suit

$$S := Y_0^6 + Y_1^6 + Y_2^6 + a_1(Y_0^3 Y_1^3 + Y_0^3 Y_2^3 + Y_1^3 Y_2^3) + \\ a_2 Y_0 Y_1 Y_2 (Y_0^3 + Y_1^3 + Y_2^3) + a_3 Y_0^2 Y_1^2 Y_2^2 = 0.$$

Pour trouver les coefficients  $a_i$  en termes du paramètre  $\lambda$  on utilisera les propriétés des points de rebroussement de la sextique.

Les points d'inflexion de la cubique sont les points d'intersection de  $E$  avec le Hessien de  $E$ . Un simple calcul exhibe les points d'inflexions comme l'orbite du point  $p = (0 : 1 : -1)$ . Alors les points de rebroussement de la courbe duale sont donnés par l'orbite du point  $\mathcal{D}(p) = (\lambda : 1 : 1)$ . On obtient deux équations linéairement indépendantes en évaluant les dérivées partielles  $\frac{\partial F}{\partial Y_0}$  et  $\frac{\partial F}{\partial Y_1}$  au point singulier  $(\lambda : 1 : 1)$ . Pour donner une troisième équation, on considère la droite  $\ell$  tangente à la sextique avec multiplicité 3 en  $\mathcal{D}(p)$ . En utilisant le fait que cette droite est l'image par  $\mathcal{D}$  du point d'inflexion en  $p$ , on trouve que  $Y_1 = Y_2$  est l'équation qui définit  $\ell$  dans  $\mathbb{P}^{2*}$ . Donc, la dérivée seconde du polynôme

$$S|_{Y_1=Y_2=1} = Y_0^6 + 2 + a_1(2Y_0^3 + 1) + a_2 Y_0(Y_0^3 + 2) + a_3 Y_0^2 = 0,$$

doit s'annuler en  $Y_0 = \lambda$ . On obtient ainsi le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} 6\lambda^5 + 6a_1\lambda^2 + a_2(4\lambda^3 + 2) + 2a_3\lambda &= 0 \\ 6 + 3a_1(\lambda^3 + 1) + a_2\lambda(\lambda^3 + 5) + 2a_3\lambda^2 &= 0 \\ 9a_1\lambda^2 + a_2(4\lambda^3 + 5) + 4a_3\lambda &= 0, \end{aligned}$$

qui a comme solution les valeurs  $a_1 = 4\lambda^3 - 2$ ,  $a_2 = -6\lambda^2$ ,  $a_3 = -3\lambda(\lambda^3 - 4)$ . Ceci prouve le lemme suivant

**Lemme 2.6.1** *L'équation de  $E^*$  dans  $\mathbb{P}^{2*}$  est*

$$F_\lambda := Y_0^6 + Y_1^6 + Y_2^6 + (4\lambda^3 - 2)(Y_0^3 Y_1^3 + Y_0^3 Y_2^3 + Y_1^3 Y_2^3) \\ - 6\lambda^2 Y_0 Y_1 Y_2 (Y_0^3 + Y_1^3 + Y_2^3) - 3\lambda(\lambda^3 - 4) Y_0^2 Y_1^2 Y_2^2 = 0.$$

**Corollaire 2.6.1** *Soient  $E$  et  $E'$  deux cubiques lisses dans  $\mathbb{P}^2$  telles que leurs courbes duales ont le même ensemble de points de rebroussement. Alors  $E^* = (E')^*$ .*

## 2.7 Le produit des courbes elliptiques

On pose  $A := JC$ . Soit  $\eta \in A[3]$ ,  $\eta \neq 0$  et soit  $f : C_\eta \rightarrow C$  le revêtement étale 3-cyclique associé à  $\eta$ . Rappelons que

$$\text{Gal}(C_\eta/\mathbb{P}^1) = \langle \sigma, j \mid \sigma^3 = j^2 = 1, j\sigma = \sigma^2 j \rangle$$

avec  $j : C_\eta \rightarrow C_\eta$  un relèvement de l'involution hyperelliptique  $\iota$  sur  $C$ . On a montré (c.f. 3.1.1) que la variété de Prym  $P = \text{Prym}(C_\eta/C)$  est isomorphe au produit de courbes elliptiques  $E_\eta \times E_\eta$ , avec  $E_\eta := C_\eta/\langle j \rangle$ . On écrira  $E$  à la place de  $E_\eta$  s'il n'y a pas de confusion. Soit  $M$  la polarisation sur  $P \simeq E \times E$  de type (1,3) induite par la polarisation principale de  $JC_\eta$ . Les automorphismes  $\sigma$  et  $j$  induits sur  $JC_\eta$  se restreignent à des automorphismes de  $P$ .

**Lemme 2.7.1** *Les automorphismes  $\sigma$  et  $j$  sur  $E \times E$  prennent la forme matricielle*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*respectivement.*

*Démonstration :* On considère l'isomorphisme  $\psi : E \times E \xrightarrow{\sim} P$ , donné par  $\psi(x, y) = x + \sigma y$ . Puisque  $\sigma \in \text{Gal}(C_\eta/C)$ , il vérifie l'équation  $\sigma^2 + \sigma + 1 = 0$  dans  $P \subset \text{Ker Nm}_f$ . En appliquant  $\sigma$  à  $x + \sigma y \in P$  on a

$$\sigma(x + \sigma y) = \sigma x + \sigma^2 y = -y - \sigma y + \sigma x.$$

On en déduit que  $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

En appliquant  $j$  à  $x + \sigma y \in P$  on obtient

$$jx + j\sigma y = x + \sigma^2 y = (x - y) - \sigma y,$$

puisque par définition  $j$  est induit l'identité sur  $E$  (c.f. section 3.1). On a donc que  $\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

□

Grâce au résultat suivant (Lemme 5.4 [21]) on connaît la forme de la polarisation  $M$  sur  $E \times E$ .

**Lemme 2.7.2** *La polarisation principale  $\Theta$  sur  $JC_\eta$  induit la polarisation  $\Xi$  sur  $E \times E$  laquelle est invariante par l'action de  $\sigma$ . De plus,*

$$\Xi = [E \times \{0\} + \{0\} \times E + \Delta] \in H^2(E \times E, \mathbb{Z})$$

où  $\Delta$  désigne la diagonale dans  $E \times E$ .

En identifiant  $E$  avec sa variété duale  $\hat{E}$  via la polarisation canonique, l'isogénie  $\phi_M : E \times E \rightarrow E \times E$  est donnée par une matrice de la forme (c.f. section 3.2)

$$\phi_M = \begin{pmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{pmatrix},$$

où  $\beta$  est un automorphisme de  $E$ . Vu que  $M$  est  $\sigma$ -invariant on a

$$\phi_M \circ T^{-1} = \hat{T} \circ \phi_M,$$



avec  $\widehat{T} = {}^tT$  l'application duale vue comme automorphisme de  $E \times E$ . On en déduit  $\beta = -1$ . On a donc

$$K(M) = \text{Ker } \phi_M = \{(x, -x) \mid 3x = 0\}.$$

Notons  $J$  l'involution sur  $E \times E$  donnée par

$$J = -\widetilde{J}T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Remarques :*

1) Les matrices  $T$  et  $J$  satisfont les relations  $T^3 = J^2 = 1$  et  $TJ = JT^2$ , donc elles engendrent le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ .

2) On a  $K(M) = \text{Fix}(T) \subset \text{Fix}(J) = \mathcal{A}$ , où  $\mathcal{A}$  désigne l'anti-diagonale dans  $E \times E$ .

**Lemme 2.7.3** *Les automorphismes  $T$  et  $J$  induisent l'identité dans  $H^0(M)$ .*

*Démonstration :* Soit  $\vartheta \neq 0$  une section globale du fibré  $\mathcal{O}_E(0)$ . Alors

$$\Theta = p_1^* \vartheta \cdot p_2^* \vartheta \cdot \alpha^* \vartheta \in H^0(M),$$

où les  $p_i : E \times E \rightarrow E$  sont les projections et  $\alpha : E \times E \rightarrow E$  est donnée par  $\alpha(x, y) = x - y$ . On a donc

$$T^* \Theta = T^* p_1^* \vartheta \cdot T^* p_2^* \vartheta \cdot T^* \alpha^* \vartheta = (-p_2)^* \vartheta \cdot \alpha^* \vartheta \cdot (-p_1)^* \vartheta = \Theta.$$

Pour tout  $x \in K(M) = \text{Fix}(T)$  on a

$$T^* t_x^* \Theta = t_x^* T^* \Theta = t_x^* \Theta.$$

Par le théorème de Stone-von Neuman les sections  $t_x^* \Theta$ ,  $x \in K(M)$  engendrent l'espace vectoriel  $H^0(M)$ , donc  $T$  induit l'identité sur  $H^0(M)$ . De même,

$$J^* \Theta = J^* p_1^* \vartheta \cdot J^* p_2^* \vartheta \cdot J^* \alpha^* \vartheta = (-p_2)^* \vartheta \cdot (-p_1)^* \vartheta \cdot (-\alpha)^* \vartheta = \Theta,$$

puisque le fibré  $\mathcal{O}_E(0)$  est symétrique. Comme  $K(M) \subset \text{Fix}(J)$   $t_x$  et  $J$  commutent pour tout  $x \in K(M)$ , alors  $J^* t_x^* \Theta = t_x^* \Theta$ . On conclut que  $J$  induit l'identité sur  $H^0(M)$ .

□

Considérons l'application  $\varphi_M : E \times E \rightarrow |M|^* \simeq \mathbb{P}^2$ , associée à  $M$ . Alors  $\varphi_M$  est une application surjective de degré 6, ramifiée le long d'une courbe plane de degré 18 (c.f. exemple 10.1.5 [20]). Le lemme précédent et le fait que  $\deg \varphi_M = |\mathfrak{S}_3| = 6$  impliquent le corollaire

**Corollaire 2.7.1** *L'application  $\varphi_M$  est un revêtement de Galois avec groupe de Galois  $\mathfrak{S}_3 = \langle T, J \rangle$ .*

Donc  $\varphi_M$  se factorise par

$$E \times E \xrightarrow{\varphi_T} Y \xrightarrow{\varphi_J} \mathbb{P}^2,$$

où  $\varphi_T$  et  $\varphi_J$  sont des revêtements de degrés 3 et 2 respectivement. La surface  $Y$  a comme singularités les 9 points correspondants aux points fixes par  $T$ . Donc le revêtement double  $\varphi_J : Y \rightarrow \mathbb{P}^2$  est ramifié sur une courbe  $D \subset \mathbb{P}^2$  avec 9 singularités. Comme  $\varphi_T$  est étale en codimension 1, le diviseur de ramification de  $\varphi_M$  est  $3D$  avec  $\deg D = 6$ . Observons que la restriction de  $\varphi_M$  à l'anti-diagonale donne une bijection entre  $E \simeq \mathcal{A}$  et  $D$ , et que  $\varphi_M$  envoie les 9 points de  $K(M) = \text{Fix}(T)$  dans les points singuliers de  $D$ .

On considère  $E$  plongée dans  $\mathbb{P}^2 \simeq |3 \cdot 0|^*$ . Soit  $\Lambda : E \times E \rightarrow \mathbb{P}^{2*}$  l'application qui envoie  $(x, y) \in E \times E$  dans  $\ell_{x, -y}$ , la droite qui relie  $x$  à  $-y$  et soit  $\delta : E \rightarrow E \times E$ , l'application définie par  $x \mapsto (x, -x)$ .

**Lemme 2.7.4** *Il existe un isomorphisme  $\lambda : \mathbb{P}^{2*} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2$  tel que le diagramme suivant commute*

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\delta} & E \times E & \xrightarrow{\varphi_M} & \mathbb{P}^2 \\ \downarrow \varphi_{3 \cdot 0} & & \downarrow \Lambda & \nearrow \lambda & \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \mathbb{P}^{2*} & & \end{array}$$

où  $\mathcal{D}$  est l'application duale.

*Démonstration :* Il suffit de montrer qu'il existe une droite  $\ell \subset \mathbb{P}^{2*}$  telle que  $\Lambda^{-1}(\ell) = E \times \{0\} + \{0\} \times E + \Delta = \Xi$ , puisque  $M = \mathcal{O}_{E \times E}(\Xi)$  (c.f. lemme 2.7.2). Prenons  $\ell$  la droite d'incidence de l'origine  $0 \in E \subset \mathbb{P}^2$ . On a

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(\ell) &= \{(x, y) \in E \times E \mid 0 \in \ell_{x, -y}\} \\ &= E \times \{0\} + \{0\} \times E + \{(x, y) \mid (x) + (-y) + 0 \equiv 3 \cdot 0\} \\ &= E \times \{0\} + \{0\} \times E + \Delta \end{aligned}$$

En particulier, l'image de  $(x, -x)$  par  $\Lambda$  est la droite tangente à  $E$  en  $x$ .

□

**Corollaire 2.7.2** *La sextique  $D$  est isomorphe à la duale de la cubique  $E$ .*

Pour chaque  $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}[3]$  d'image non-nulle dans  $A[3]$ , on note  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$ , le projectivisé de l'espace de points fixes par l'action de  $\tilde{\eta}$ . On utilisera cette notation tantôt pour l'action de  $\tilde{\eta}$  sur  $V$ , tantôt pour l'action de  $\tilde{\eta}$  sur  $V^*$ .

**Lemme 2.7.5** *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 P & & \\
 \downarrow & \searrow \varphi_M & \\
 P/\langle\sigma\rangle & \xrightarrow{\theta|} & \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \\
 \downarrow f_* & & \downarrow \tilde{\eta} \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\theta} & |3\Theta|
 \end{array}$$

*commute.*

*Démonstration* : Soit  $L \in P$ . Par la formule de projection on a

$$f_*L \otimes \eta \simeq f_*(L \otimes f^*\eta) \simeq f_*(L \otimes \mathcal{O}_{C_\eta}) \simeq f_*L.$$

Ainsi l'image de  $P/\langle\sigma\rangle$  dans  $|3\Theta|$  est fixée par l'action de  $\eta$ . Il existe donc  $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}[3]$ , relèvement de  $\eta$ , tel que l'image de  $P/\langle\sigma\rangle$  est contenue dans le plan  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$ .

Soit  $L \in P$  un fibré en droites et  $(x, y)$  son point correspondant dans  $E \times E$  via l'isomorphisme  $P \simeq E \times E$ . On a

$$\iota^*(f_*L)^* \simeq \iota^*(f_*L^{-1}) \simeq f_*(j^*L^{-1})$$

puisque  $j$  est un relèvement de l'involution hyperelliptique (c.f. section 3.1). Le fibré  $j^*L^{-1} \in P$  correspond au point  $j(-x, -y) = (-x + y, y) \in E \times E$ . Comme

$$\sigma(-x + y, y) = (-y, -x) = J(x, y),$$

on en déduit que la restriction de l'involution  $\mathbf{i}$  à  $P/\langle\sigma\rangle \hookrightarrow \mathcal{M}$  correspond à l'involution  $J$  sur  $E \times E/\langle\sigma\rangle$  sous l'isomorphisme  $P \simeq E \times E$ .

□

*Remarque* : On observe que l'action de  $\eta \in A[3]$  sur  $\mathbb{P}^8$  fixe les trois plans  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  correspondants aux trois relèvements de  $\eta$  dans  $\mathcal{H}[3]$ . Un de ces trois plans est distingué, celui qui contient le diviseur  $\Theta + \Theta_\eta + \Theta_{-\eta}$ , image de  $f_*\mathcal{O}_{C_\eta}$  par l'application  $\theta$ .

**Corollaire 2.7.3** *La sextique  $D$  est le lieu de ramification de  $\theta|_{P/\langle\sigma\rangle}$ , i.e.  $D = \mathcal{B} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$*

**Définition 2.7.1** *Pour chaque  $\eta \in A[3]$  non-nul, on note  $D_\eta$  l'intersection de la sextique  $\mathcal{B} \subset |3\Theta|$  avec le plan  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  de points fixes par l'action de  $\eta$  qui contient le diviseur  $\Theta + \Theta_\eta + \Theta_{-\eta}$ .*

Par le diagramme (2.4)  $D_\eta$  est la duale de  $E_\eta$ , où  $E_\eta$  est la courbe elliptique de la décomposition  $\text{Prym}(C_\eta/C) \simeq E_\eta \times E_\eta$ .

D'un autre côté, on veut étudier les intersections  $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \subset |3\Theta|^*$ . On choisit les coordonnées sur  $(\mathbb{Z}/3)^2$  de façon que l'image de  $\tilde{\eta}$  dans  $A[3] \simeq (\mathbb{Z}/3)^4$  soit  $(00, 10)$ . Il suffit donc d'analyser l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec le plan de points fixes correspondant à  $\tilde{\eta} = (1, 00, 10) \in \mathcal{H}[3]$ . On notera ce plan  $\mathbb{P}^2$ , s'il n'y a pas de confusion. Le plan  $\mathbb{P}^2$  est donc défini par les équations  $X_{10} = X_{11} = X_{12} = X_{20} = X_{21} = X_{22} = 0$  (c.f. section 1.2). On note  $X_i := X_{0i}$ ,  $i = 0, 1, 2$  les coordonnées homogènes de  $\mathbb{P}^2$ . Considérons  $F = 0$  l'équation qui définit  $\mathcal{C}$  (c.f. équation (1.1)). On trouve que

$$F_{\eta} := \beta_0(X_0^3 + X_1^3 + X_2^3) + 3\beta_1 X_0 X_1 X_2 = 0$$

est l'équation qui définit  $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}^2$ , où  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont des scalaires qui dépendent de  $J^1$ . On vérifie aisément que

$$(2.5) \quad \frac{\partial F_{\eta}}{\partial X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_{0i}}|_{\mathbb{P}^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial X_b}|_{\mathbb{P}^2} = 3Q_b|_{\mathbb{P}^2} = 0,$$

pour  $i = 0, 1, 2$  et  $b \notin \{00, 01, 02\}$ . Ceci implique que  $F_{\eta} \neq 0$  et que

$$\text{Sing}(\mathcal{C} \cap \mathbb{P}^2) = \mathbb{P}^2 \cap \text{Sing} \mathcal{C}.$$

De façon générale, on a que  $\text{Sing}(\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2) = \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \cap J^1 = \emptyset$  pour tout  $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}[3]$ , car  $\eta$  agit par translation sur  $J^1$  et donc  $J^1$  ne contient pas de points fixes par  $\eta$ . Par conséquent, les cubiques  $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  sont lisses et contenues dans  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \cap \mathcal{C}_{sm}$ . Les équations (2.5) assurent la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 & \xrightarrow{\mathcal{D}|} & \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^{2*} \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ \mathbb{P}^8 & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \mathbb{P}^{8*} \end{array}$$

On a ainsi

$$i(\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2)^* = \overline{(i \circ \mathcal{D}|)(\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2)} = \overline{(\mathcal{D} \circ i)(\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2)} \subset \overline{\mathcal{D}(\mathcal{C}_{sm})} = \mathcal{C}^*,$$

d'où

$$(\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2)^* \subset \mathcal{C}^* \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^{2*}.$$

On a donc (c.f. section 2.4)

$$(2.6) \quad 6 = \deg(\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2)^* \leq \deg(\mathcal{C}^* \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^{2*}) = \deg \mathcal{C}^* \leq 6.$$

Il en découle que  $\deg \mathcal{C}^* = 6$  et donc l'inclusion ci-dessus est en fait une égalité.

Pour tout  $\tilde{\eta} = (t, x, x^*) \in \mathcal{H}[3]$  et pour tout  $b \in (\mathbb{Z}/3)^2$  on a

$$\tilde{\eta} \cdot Q_b = t^2 x^* (2b - 2x) \cdot Q_{b-x}.$$

Donc, pour tout  $p \in V$ ,  $\mathcal{D}(\tilde{\eta}p) = (t^2, x, 2x^*)\mathcal{D}(p)$ . On en déduit que  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^{2*} = \mathbb{P}(\text{Fix}(\tilde{\eta}')) \subset |3\Theta|$ , avec  $\tilde{\eta}' = (t^2, x, 2x^*)$ .

**Définition 2.7.2** *Pour chaque  $\eta \in A[3]$  non-nul, on note  $\tilde{D}_\eta$  l'intersection de la sextique  $\mathcal{C}^*$  avec le plan  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \subset |3\Theta|$  de points fixes par l'action de  $\eta$  qui contient le diviseur  $\Theta + \Theta_\eta + \Theta_{-\eta}$ .*

*Remarque :* On observe que les cubiques  $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  sont isomorphes pour les  $\tilde{\eta} = (t, x, x^*)$  de même image dans  $A[3]$ . On a donc une copie de la courbe  $\tilde{D}_{\eta'}$  dans chacun des plans  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^{2*} = \mathbb{P}(\text{Fix}(\tilde{\eta}'))$ , les plans de points fixes par l'action de  $\eta' = (x, 2x^*)$ .

**Proposition 2.7.1** *Les sextiques  $D_\eta$  et  $\tilde{D}_\eta$  coïncident.*

*Démonstration :* Étant donné que  $D_\eta$  et  $\tilde{D}_\eta$  sont des courbes duales de cubiques lisses planes, elles sont des sextiques avec 9 points de rebroussement correspondants aux 9 points d'inflexion. Rappelons qu'on a défini l'application  $\psi : J^1 \times J^1 \dashrightarrow |3\Theta|$  par

$$(a, b) \mapsto \Theta_x + \Theta_y + \Theta_{-x-y},$$

où  $\Theta_x$  et  $\Theta_y$  sont les seuls translatés du diviseur thêta passant par  $a$  et  $b$ . Par le théorème 2.5.1 on a

$$\text{Im } \psi = \text{Im } \varphi \subset \mathcal{C}^*.$$

De plus, par la remarque du lemme 2.5.1 l'image de  $\psi$  est contenue dans le lieu singulier de  $\mathcal{C}^*$ . On a donc

$$\text{Im } \psi \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \subset \text{Sing } \mathcal{C}^* \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \subseteq \text{Sing}(\mathcal{C}^* \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2) = \text{Sing } \tilde{D}_\eta.$$

Par ailleurs, on a  $\text{Im } \psi \subset \text{Sing } \mathcal{B}$  puisque les diviseurs de la forme  $\Theta_x + \Theta_y + \Theta_{-x-y}$  proviennent de fibrés vectoriels décomposables, et donc des points singuliers de  $\mathcal{M}$ . Ainsi on obtient

$$\text{Im } \psi \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \subset \text{Sing } \mathcal{B} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \subseteq \text{Sing}(\mathcal{B} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2) = \text{Sing } D_\eta.$$

Soit  $K_\eta := \langle \eta \rangle^\perp / \langle \eta \rangle \simeq (\mathbb{Z}/3) \times \widehat{(\mathbb{Z}/3)}$ . Soient  $X_0, X_1, X_2$  des coordonnées de  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$ , elles sont donc fixées par l'action de  $\tilde{\eta} = (t, \eta) \in \mathcal{H}[3]$ . Observons qu'un élément  $(s, \lambda) \in \mathcal{H}[3]$ , préserve  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  si et seulement si

$$(t, \eta)((s, \lambda) \cdot X_i) = ((s, \lambda) \cdot X_i) = ((s, \lambda)(t, \eta)) \cdot X_i,$$

pour  $i = 0, 1, 2$ , i.e. si et seulement si  $(t, \eta)$  et  $(s, \lambda)$  commutent, ce qui se traduit par  $\langle \lambda, \eta \rangle = 0$ . Par conséquent le groupe  $\mu_3 \times K_\eta \simeq \mathcal{H}[3]$  agit sur les coordonnées de  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  comme dans (2.3). Observons que par construction  $D_\eta$

et  $\tilde{D}_\eta$  sont  $K_\eta$ -invariantes (c.f. section 2.6).

Soit  $x \in A[3]$ , tel que  $\langle x, \eta \rangle = 0$ . Le diviseur  $\Theta_x + \Theta_{\eta+x} + \Theta_{2\eta+x} \in |3\Theta|$  est un point fixe pour l'action de  $\eta$ , on a donc

$$\Theta_x + \Theta_{\eta+x} + \Theta_{2\eta+x} \in \text{Im } \psi \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2,$$

et son orbite par l'action de  $K_\eta$  est aussi contenue dans  $\text{Im } \psi \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$ . Puisque  $|K_\eta| = 9$ , les points de cette orbite sont les points singuliers de  $D_\eta$  et  $\tilde{D}_\eta$ . Par le corollaire 2.6.1 cela suffit pour conclure que les sextiques  $D_\eta$  et  $\tilde{D}_\eta$  sont identiques.

□

## 2.8 Sextiques dans $\mathbb{P}^8$ invariantes par le groupe de Heisenberg

Soit  $V = H^0(J^1, \mathcal{L})$ , un espace vectoriel de dimension 9 avec des coordonnées  $Z_b$  où  $b \in (\mathbb{Z}/3)^2$ . Considérons l'action de  $\mathcal{H}[3]$  dans l'espace des sextiques  $S^6V$ . Comme cette action se factorise par le quotient abélien  $A[3]$ , on considérera l'espace des sextiques  $A[3]$ -invariantes  $(S^6V)^{A[3]}$ , au lieu de l'espace des sextiques  $\mathcal{H}[3]$ -invariantes.

**Lemme 2.8.1** *L'espace vectoriel  $(S^6V)^{A[3]}$  est de dimension 43.*

*Démonstration :* Par la théorie des représentations (§2.2 [14]) on a

$$(2.7) \quad \sum_{a \in A[3]} \text{Tr}(a | S^6V) = \dim S_0^6V \cdot |A[3]|.$$

Par ailleurs, par le lemme 2 (§5, Ch. V [7]) on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr}(s | S^nV) T^n = \frac{1}{\det(1 - sT)},$$

où  $s$  est un endomorphisme de  $V$ . Dans notre cas l'action d'un élément de  $\tilde{a} \in \mathcal{H}[3]$  sur  $V$  a comme valeurs propres les éléments de  $\mu_3$ . En fait, chaque racine cubique de l'unité apparaît avec multiplicité 3. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Tr}(\tilde{a} | S^nV) T^n &= \frac{1}{\det(1 - \tilde{a}T)} \\ &= \frac{1}{(1 - T^3)^3} \\ &= 1 + 3T^3 + 6T^6 + \dots \end{aligned}$$

Pour  $n = 6$  on obtient que  $Tr(a \mid S^6V) = 6$  pour tout  $a \in A[3]$  non nul. Donc de l'équation (2.7) il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A[3]} Tr(a \mid S^6V) &= 6 \cdot 80 + \dim S^6V \\ &= 480 + 3003 \\ &= \dim S_0^6V \cdot |A[3]| \end{aligned}$$

et on obtient que  $\dim S_0^6V = 3483/81 = 43$ .

□

Pour chaque  $\eta \in A[3]$ ,  $\eta \neq 0$  on note  $V_\eta$  le sous-espace de  $V$  (de dimension 3) des points fixes par l'action de  $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}[3]$ , où  $\tilde{\eta}$  est le relèvement de  $\eta$  tel que  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \subset |3\Theta|$  est le plan distingué (c.f. remarque de la page 27). On observe que  $V_\eta = V_{-\eta}$ . On considère le groupe  $K_\eta = \langle \eta \rangle^\perp / \langle \eta \rangle$ . Puisque l'action de  $\mathcal{H}[3] \simeq \mu_3 \times K_\eta$  sur  $S^6V_\eta$  se factorise par le quotient  $K_\eta$  on considérera l'espace des sextiques  $K_\eta$ -invariantes au lieu de  $(S^6V_\eta)^{\mathcal{H}[3]}$ . Soit

$$res_\eta : (S^6V)^{A[3]} \rightarrow (S^6V_\eta)^{K_\eta}$$

l'application restriction. On définit l'application

$$\nu := \sum_{\eta} res_\eta : (S^6V)^{A[3]} \rightarrow \bigoplus (S^6V_\eta)^{K_\eta}$$

où la somme parcourt les  $\eta \in A[3]$ ,  $\eta \neq 0$ , modulo  $\eta \sim -\eta$ . Le but est de décrire le noyau de cette application pour savoir sous quelles conditions les restrictions aux sous-espaces des points fixes caractérisent complètement une sextique invariante par le groupe de Heisenberg.

On va d'abord donner une base de l'espace  $(S^6V)^{A[3]}$ . On note  $K := \{(x, 00) \mid x \in (\mathbb{Z}/3)^2\}$  et  $\hat{K} := \{(00, x^*) \mid x^* \in (\widehat{\mathbb{Z}/3})^2\}$ . Un monôme de degré 6,  $Z_{\mu_1} \cdots Z_{\mu_6}$ , est invariant par l'action de  $\hat{K}$  si et seulement si  $\sum \mu_i = 0$ . On peut donc construire des polynômes  $A[3]$ -invariants en faisant agir  $K$  sur chacun des monômes  $\hat{K}$ -invariants et en prenant la somme sur tous les éléments de  $K$ . Avec cette méthode on obtient une base de  $(S^6V)^{A[3]}$

comme suit

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in (\mathbb{Z}/3)^2} Z_\sigma^6 \\
& \sum_{\sigma} Z_{\sigma+\mu}^3 Z_\sigma^3 \quad \text{avec } \mu \neq 0, \text{ modulo } \mu \sim -\mu \\
& \sum_{\sigma} Z_\sigma^3 Z_{\sigma+\mu_1} Z_{\sigma+\mu_2} Z_{\sigma+\mu_3} \quad \text{avec } \sum \mu_i = 0 \\
& \frac{1}{3} \sum_{\sigma} Z_\sigma^2 Z_{\sigma+\mu}^2 Z_{\sigma+2\mu}^2 \quad \text{avec } \mu \neq 0 \\
& \sum_{\sigma} Z_\sigma^2 Z_{\sigma+\mu_1} Z_{\sigma+\mu_2} Z_{\sigma+\mu_1+\mu_2}^2 \quad \text{avec } \mu_1, \mu_2 \neq 0, \langle \mu_1 \rangle \neq \langle \mu_2 \rangle \\
& \sum_{\sigma} Z_\sigma^2 Z_{\sigma+\mu_1} Z_{\sigma+\mu_1^{-1}} Z_{\sigma+\mu_2} Z_{\sigma+\mu_2^{-1}} \quad \text{avec } \mu_1, \mu_2 \neq 0, \langle \mu_1 \rangle \neq \langle \mu_2 \rangle \\
& \frac{1}{3} \sum_{\sigma} \left( \prod_i Z_{\sigma+\mu_i} \right) \quad \text{avec } \sum_{i=1}^6 \mu_i = 0, \mu_i \neq \mu_j \text{ pour } i \neq j.
\end{aligned}$$

On vérifie que ces éléments forment une base pour  $(S^6V)^{A[3]}$  (cette base est écrite explicitement dans l'annexe). On a utilisé le programme Maple pour calculer le rang et le noyau de l'application  $\nu$  (c.f. Annexe). On a trouvé que  $\nu$  est de rang 39 et qu'une base pour  $\text{Ker } \nu$  est donnée par

$$\begin{aligned}
w_1 &:= \sum_{\sigma} Z_{\sigma+20}^3 Z_{\sigma} Z_{\sigma+01} Z_{\sigma+02} - \sum_{\sigma} Z_{\sigma+10}^3 Z_{\sigma} Z_{\sigma+01} Z_{\sigma+02} \\
w_2 &:= \sum_{\sigma} Z_{\sigma+02}^3 Z_{\sigma} Z_{\sigma+10} Z_{\sigma+20} - \sum_{\sigma} Z_{\sigma+01}^3 Z_{\sigma} Z_{\sigma+10} Z_{\sigma+20} \\
w_3 &:= \sum_{\sigma} Z_{\sigma+02}^3 Z_{\sigma} Z_{\sigma+11} Z_{\sigma+22} - \sum_{\sigma} Z_{\sigma+01}^3 Z_{\sigma} Z_{\sigma+11} Z_{\sigma+22} \\
w_4 &:= \sum_{\sigma} Z_{\sigma+20}^3 Z_{\sigma} Z_{\sigma+12} Z_{\sigma+21} - \sum_{\sigma} Z_{\sigma+10}^3 Z_{\sigma} Z_{\sigma+12} Z_{\sigma+21}.
\end{aligned}$$

L'involution  $\iota^* : J^1 \rightarrow J^1$  s'étend à une involution  $\iota$  de  $V$  agissant par

$$\iota : [Z_{00}, Z_{01}, \dots, Z_{22}] \mapsto [Z_{00}, Z_{-(01)}, \dots, Z_{-(22)}] = [Z_{00}, Z_{02}, \dots, Z_{11}].$$

Donc  $\iota$  agit aussi sur l'espace des sextiques  $(S^6V)^{A[3]}$ . Soit  $(S^6V)^{A[3]} = W_+ \oplus W_-$  la décomposition en les parties  $\iota$ -invariante et  $\iota$ -anti-invariante respectivement.

Remarque : On observe que  $\iota(w_k) = -w_k$  pour  $k = 1, 2, 3$ . Donc  $\text{Ker } \nu \subset W_-$ , d'où  $W_+ \cap \text{Ker } \nu = \{0\}$ .

Pour tout  $\eta \in A[3]$  et  $E \in \mathcal{B}$  on a

$$\mathbf{i}(E \otimes \eta) = \iota^*(E \otimes \eta)^* \simeq \iota^* E^* \otimes \iota^* \eta^{-1} \simeq E \otimes \eta,$$



d'où  $\mathcal{B}$  est  $A[3]$ -invariante. D'un autre coté, puisque l'application duale  $\mathcal{D}$  est  $\mathcal{H}[3]$ -équivariante on a que la sextique  $\mathcal{C}^*$  est aussi  $A[3]$ -invariante dans  $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^8$ . Soient  $R$  et  $S$  les polynômes homogènes dans  $(S^6V)^{A[3]}$  qui définissent  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}^*$  respectivement.

**Proposition 2.8.1** *Le polynôme  $R$  est  $\iota$ -invariant et  $S \in W_+ \cup W_-$ .*

*Démonstration :* La cubique de Coble est définie par le polynôme

$$F = \sum_{b \in K} X_b Q_b = 0.$$

En appliquant l'involution  $\iota$  on obtient

$$\iota\left(\sum_b X_b Q_b\right) = \sum_b \iota(X_b) \iota(Q_b) = \sum_b X_{-b} Q_{-b}$$

et donc  $F$  est  $\iota$ -invariante. Étant donné que l'application duale  $\mathcal{D}$  est définie par

$$\mathcal{D} : x \mapsto [Q_{00}(x) : \dots : Q_{22}(x)]$$

et  $\iota Q_b(x) = Q_{-b}(x) = Q_b(\iota x)$ , alors  $\mathcal{D}$  est  $\iota$ -équivariante, d'où  $S \in W_+ \cup W_-$ .

Soit  $\Theta_E = \text{Supp } \theta(E)$  avec  $E \in \mathcal{M}$ . On a montré (c.f. proposition 2.2.1) que

$$\iota^*(\Theta_E) = \Theta_{E^*}.$$

Si  $E \in \mathcal{B} = \{E \in \mathcal{M} \mid \iota^* E \sim_s E^*\}$ , alors  $E^* \in \mathcal{B}$  et donc  $\mathcal{B}$  est  $\iota$ -invariante. Par conséquent,  $R \in W_+ \cup W_-$ . L'action de l'involution  $\iota$  sur  $V$  induit une décomposition  $V = V_+ \oplus V_-$ , en les sous-espaces associés aux valeurs propres  $\{\pm 1\}$ . Si on suppose  $R \in W_-$ , alors la sextique  $\mathcal{B}$  contient l'espace  $\mathbb{P}(V_+) \simeq \mathbb{P}^4$ . En effet, si  $p \in V_+$  alors

$$R(p) = R(\iota p) = \iota R(p) = -R(p),$$

et  $R(p) = 0$ . On analysera l'involution  $\iota^*$  sur  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$  pour donner une estimation de la dimension du lieu de points fixes.

Soit  $E \in \mathcal{B}$  un fibré vectoriel  $\iota$ -invariant.

*Cas 1.* Supposons  $E$  stable. On a donc  $\iota^* E \simeq E^* \simeq E$ , i.e. il existe un isomorphisme  $u : E \xrightarrow{\sim} E^*$ . Comme  $E$  est stable, l'homomorphisme  $u^{-1} \circ {}^t u : E \rightarrow E$  est de la forme  $\lambda \cdot \text{Id}$ , avec  $\lambda \neq 0$ . On a

$$\det u = \det {}^t u = \lambda^3 \det u,$$

donc  $\lambda^3 = 1$ ; et puisque  ${}^t u = \lambda \cdot \text{Id} \circ u$ , on a  $\lambda^2 = 1$ . Donc  ${}^t u = u$ . On a ainsi que  $u$  induit une forme quadratique sur  $E$ , autrement dit,  $E \in H^1(C, \mathcal{O}SO_3)$ . Par la suite exacte (2.1) on obtient que la dimension du lieu des fibrés  $E \in \mathcal{B}$  qui sont stables et  $\iota$ -invariants est au plus la dimension de  $\mathcal{U}_C(2, 0)$ , l'espace

de modules des fibrés vectoriels semi-stables de rang 2 et de degré 0. Il en découle

$$\dim \text{Fix}(\iota^*) \cap \mathcal{B}_s \leq 3.$$

*Cas 2.* Supposons  $E \sim_s L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ , avec  $L_i$  des fibrés en droites. On a

$$\iota^*(L_1 \oplus L_2 \oplus L_3) \simeq L_1^{-1} \oplus L_2^{-1} \oplus L_3^{-1} \sim_s L_1 \oplus L_2 \oplus L_3.$$

Supposons  $L_1 \simeq L_2^{-1}$ . Comme  $\det E \simeq L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \simeq \mathcal{O}_C$  on a  $L_3 \simeq \mathcal{O}_C$  et donc  $E \sim_s L_1 \oplus L_1^{-1} \oplus \mathcal{O}_C$ . Par contre, si pour tout  $i = 1, 2, 3$ ,  $L_i \simeq L_i^{-1}$  alors  $L_i \in JC[2]$ , ce qui ne rajoute qu'un nombre fini de points fixes. Donc dans ce cas la  $\dim \text{Fix}(\iota^*) \leq \dim \text{Pic}(C) = 2$ .

*Cas 3.* Supposons  $E \sim_s L \oplus F$  avec  $F \in \mathcal{U}_C(2, L^{-1})$  stable. On a

$$\iota^*(L \oplus F) \simeq L^{-1} \oplus F^* \sim_s L \oplus F$$

car  $E \in \text{Fix}(\iota^*)$ , ce qui implique  $L \simeq L^{-1}$  et donc  $L \in JC[2]$ , et  $F^* \simeq F$ . En combinant avec l'estimation faite dans le cas 2 on obtient

$$\dim \text{Fix}(\iota^*) \cap \mathcal{B}_{ss} \leq \dim(\mathcal{U}_C(2, 0) \cup \text{Pic}(C)) = 3.$$

En conclusion,  $\mathcal{B}$  ne contient pas l'espace  $\mathbb{P}(V_+) \simeq \mathbb{P}^4$  et donc  $R \in W_+$ . □

**Lemme 2.8.2** *Soient  $\eta, \lambda \in A[3] \setminus \{0\}$ ,  $\langle \eta \rangle \neq \langle \lambda \rangle$ . Si  $\langle \eta, \lambda \rangle = 0$ , alors  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \cap \mathbb{P}_{\tilde{\lambda}}^2 \neq \emptyset$ , avec  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\lambda}$  relèvements de  $\eta$  et  $\lambda$  respectivement.*

*Démonstration :* Supposons  $\eta, \lambda \in A[3] \setminus \{0\}$  orthogonaux. Donc le groupe  $K_{\eta, \lambda}$  engendré par  $\eta$  et  $\lambda$ , est un sous-groupe maximal isotrope. Donc le groupe  $K_{\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}}$  engendré par  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\lambda}$  est un relèvement de  $K_{\eta, \lambda}$  dans  $\mathcal{H}[3]$ , car  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\lambda}$  commutent. La représentation du groupe de Heisenberg induit une représentation de  $K_{\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}}$  dans  $V = H^0(J^1, \mathcal{L})$ . Ainsi l'intersection de  $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  et  $\mathbb{P}_{\tilde{\lambda}}^2$  est donnée par le projectivisé de l'espace vectoriel  $V^{K_{\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}}}$ , l'espace de sections invariantes par  $\tilde{\eta}$  et  $\tilde{\lambda}$ . Par la proposition 3 [23] on a

$$\dim V^{K_{\tilde{\eta}, \tilde{\lambda}}} = 1,$$

ce qui montre le lemme. □

**Lemme 2.8.3** *Pour tout  $\eta, \lambda \in A[3] \setminus \{0\}$ , il existe une suite de sous-espaces*

$$V_\eta = V_{\beta_0}, V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_n} = V_\lambda$$

*avec  $\beta_i \in A[3] \setminus \{0\}$ , telle que  $V_{\beta_i} \cap V_{\beta_{i+1}} \neq \{0\}$  pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ .*

*Démonstration* : Par le lemme 2.8.2 il suffit de montrer que pour tout  $\eta, \lambda \in A[3] \setminus \{0\}$ , il existe une suite  $\eta = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n = \lambda$  dans  $A[3] \setminus \{0\}$  telle que  $\beta_i \perp \beta_{i+1}$  pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ .

Pour tout  $y^*$  il existe  $x \neq 0$  tel que  $y^*(x) = 0$ , donc pour tout  $(y, y^*) \in A[3]$  il existe  $(x, 00) \in K$ , avec  $x \neq 0$  tel que

$$\langle (x, 00), (y, y^*) \rangle = y^*(x) = 0.$$

Comme le sous-groupe  $K$  est isotrope, cela suffit pour démontrer la proposition.  $\square$

**Proposition 2.8.2** *Soient  $\tilde{\eta}, \tilde{\lambda} \in \mathcal{H}[3]$  tels que leurs images dans  $A[3]$  vérifient les conditions du lemme 2.8.2. Soit  $E \in \mathcal{M}$  tel que  $\theta(E) \in \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \cap \mathbb{P}_{\tilde{\lambda}}^2 \subset |3\Theta|$ . Alors  $E$  n'appartient pas à  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration* : On considère l'application étale de degré 3

$$f : C_{\eta} \longrightarrow C$$

associée à  $\eta \in A[3] \setminus \{0\}$  et soit  $P = \text{Prym}(C_{\eta}/C)$ , la variété de Prym munie de la polarisation  $M$ , induite par la polarisation principale de  $JC_{\eta}$ . Soit  $\sigma$  l'automorphisme de  $C_{\eta}$  qui engendre le groupe de Galois  $\text{Gal}(C_{\eta}/C)$ . Pour tout fibré  $L \in P$  le fibré de rang 3  $f_*L$  est contenu dans  $\mathcal{M}$  et est invariant par l'action de  $\eta$ . En effet, par la formule de projection on a

$$f_*(L) \otimes \eta \simeq f_*(L \otimes f^*\eta) \simeq f_*(L \otimes \mathcal{O}_{C_{\eta}}) \simeq f_*L.$$

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ \downarrow & \searrow \varphi_M & \\ P/\langle \sigma \rangle & \xrightarrow{\theta_1} & \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \\ \downarrow f_* & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\theta} & |3\Theta| \end{array}$$

Ce diagramme montre que si  $\theta(E) \in \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$  alors  $E$  est de la forme  $f_*(L)$  avec  $L$  un fibré en droites dans la variété de Prym  $P$ . Supposons  $E \in \mathcal{M}$  tel que  $\theta(E) \in \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 \cap \mathbb{P}_{\tilde{\lambda}}^2$ . Donc  $E \simeq f_*(L)$  avec  $L \in P$  et  $E$  est invariant par l'action de  $\lambda$ . En utilisant la formule de projection on obtient

$$E \simeq f_*(L) \simeq f_*(L) \otimes \lambda \simeq f_*(L \otimes f^*\lambda).$$

Ceci implique que, soit  $L \otimes f^*\lambda \simeq \sigma^*L$ , soit  $L \otimes f^*\lambda \simeq \sigma^{2*}L$ . Par ailleurs, on a démontré précédemment que  $P \simeq Z \times Z$ , où  $Z$  est une courbe elliptique et que l'automorphisme  $\sigma$  de  $JC_{\eta}$  restreints à  $P$  prend la forme

$$\sigma : (x, y) \mapsto (-y, x - y), \quad \forall x, y \in Z.$$

On a que

$$\Gamma := \mathcal{A} + \sigma(\mathcal{A}) + \sigma^2(\mathcal{A}) \subset Z \times Z,$$

avec  $\mathcal{A}$  l'anti-diagonale dans  $Z \times Z$ , est le lieu de ramification de l'application  $\varphi_M : P \rightarrow \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2$ . Soit  $(x, y) \in Z \times Z$  le point correspondant au fibré  $L$ . Supposons  $\sigma^*L \otimes L^{-1} \simeq f^*\lambda$ . Donc le fibré  $f^*\lambda$  correspond au point

$$(\sigma - 1)(x, y) = (-y, x - y) - (x, y) = (-y - x, -2y).$$

Observons que par construction  $\sigma^*f^*\lambda \simeq f^*\lambda$ .

Supposons  $E \in \mathcal{B}$ , i.e.  $\iota^*E \simeq E^*$ . Alors  $L$  appartient au lieu de ramification de  $\varphi_M$ , autrement dit,  $(x, y) \in \Gamma$ .

Supposons  $(x, y) \in \mathcal{A}$ , alors  $y = -x$  et  $f^*\lambda$  correspond au point  $(0, 2x)$ . On a

$$\sigma(0, 2x) = (-2x, -2x) = (0, 2x),$$

et donc  $2x = 0$ , ce qui se traduit par  $f^*\lambda \simeq \mathcal{O}_{C_\eta}$ . Mais ceci est une contradiction avec l'hypothèse  $\langle \eta \rangle \neq \langle \lambda \rangle$  puisque  $\text{Ker } f^* = \langle \eta \rangle$ .

Si  $(x, y) \in \sigma^i(\mathcal{A})$ , avec  $i = 1, 2$  alors  $\sigma^{-i}(x, y) \in \mathcal{A}$ . En procédant comme avant on obtient  $(\sigma^{-i})^*f^*\lambda \simeq \mathcal{O}_{C_\eta}$  et on arrive à la même contradiction.

De manière analogue, on démontre que si  $L \otimes f^*\lambda \simeq \sigma^{2*}L$  alors  $f^*L \simeq \mathcal{O}_{C_\eta}$  et donc on contredit l'hypothèse  $\langle \eta \rangle \neq \langle \lambda \rangle$ . □

**Théorème 2.8.1** *Les polynômes  $S$  et  $R$  définissent la même hypersurface, i.e.  $\mathcal{C}^* = \mathcal{B}$ .*

*Démonstration :* Par la proposition 2.7.1 on a

$$\mathcal{C}^* \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2 = \mathcal{B} \cap \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^2,$$

pour tout  $\tilde{\eta} \in \mathcal{H}[3]$  avec projection non-nulle dans  $A[3]$ , d'où

$$S|_{V_\eta} = \epsilon(\eta)R|_{V_\eta},$$

avec  $\epsilon(\eta)$  un scalaire non-nul. Pour tout  $\eta, \lambda \in A[3] \setminus \{0\}$  tels que  $V_\eta \cap V_\lambda \neq \{0\}$  on a

$$S|_{V_\eta \cap V_\lambda} = \epsilon(\eta)R|_{V_\eta \cap V_\lambda} = \epsilon(\lambda)R|_{V_\eta \cap V_\lambda}.$$

Par la proposition 2.8.2  $R|_{V_\eta \cap V_\lambda} \neq 0$ , donc  $\epsilon(\eta) = \epsilon(\lambda)$ . Grâce au lemme 2.8.3, on déduit que le scalaire  $\epsilon$  ne dépend pas de  $\eta$ . On obtient donc l'égalité

$$S|_{V_\eta} - \epsilon R|_{V_\eta} = 0 \quad \forall \eta \in A[3] \setminus \{0\},$$

i.e.  $S - \epsilon R$  appartient au noyau de l'application  $\nu : (S^6 V)^{A[3]} \rightarrow \bigoplus (S^6 V_\eta)^{K_\eta}$ . Donc, par la remarque de la page 32,  $S - \epsilon R \in W_-$ . Si  $S \in W_-$  alors  $\epsilon R = S - (S - \epsilon R) \in W_-$ , ce qui contredit la proposition 2.8.1. Donc  $S \in W_+$  et  $S - \epsilon R$  est  $\iota$ -invariante. On a donc

$$SF - \epsilon R \in W_+ \cap \text{Ker } \nu = \{0\}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

## Chapitre 3

# Variétés de Prym associées aux revêtements $n$ -cycliques d'une courbe hyperelliptique

Soit  $H$  une courbe projective, hyperelliptique et non singulière de genre  $g$  et soit  $JH \simeq \text{Pic}^0(H)$  la jacobienne de  $H$ . On fixe un élément  $\eta \in JH$  d'ordre  $n$ . On note  $f : C \rightarrow H$  le revêtement étale  $n$ -cyclique associé à  $\eta$ . Soit  $JC$  la jacobienne de  $C$ .

Soit  $\text{Nm} : JC \rightarrow JH$ ,  $\sum n_i p_i \mapsto \sum n_i f(p_i)$ , l'application Norme de  $f$ . On appelle variété de Prym  $P = \text{Prym}(C/H)$  associée au revêtement  $f$  la composante neutre de  $\text{Ker Nm}$ . Si  $\sigma : C \rightarrow C$  est l'automorphisme d'ordre  $n$  qui engendre le groupe de Galois  $\text{Gal}(C/H)$ , on peut écrire  $P = \text{Im}(1 - \sigma)$ . La variété  $P$  est une sous-variété abélienne de  $JC$  de dimension  $(n-1)(g-1)$  avec polarisation  $\Xi$  induite par la polarisation principale de  $JC$ .

Le but de ces lignes est de montrer que lorsque  $n$  n'est pas divisible par 4 la variété de Prym  $P$  est isomorphe à un produit de jacobiniennes.

### 3.1 Décomposition de la variété de Prym

On pose  $Y = f^*(JH)$ . C'est une sous-variété abélienne supplémentaire de  $P$  dans  $JC$  de dimension  $g$ . On peut aussi décrire  $Y$  comme l'image de l'endomorphisme Norme  $1 + \sigma + \dots + \sigma^{n-1}$ .

**Proposition 3.1.1** *La polarisation  $\Xi$  sur  $P$  est du type  $(\underbrace{1, \dots, 1}_{(n-2)(g-1)}, \underbrace{n, \dots, n}_{g-1})$ .*

*Démonstration :* Puisque  $f : C \rightarrow H$  est étale l'application  $f^* : JH \rightarrow JC$  n'est pas injective ([20] 11.4.3.). En fait,  $\text{Ker } f^* = \langle \eta \rangle$ , un sous-groupe de

$JH[n]$  d'ordre  $n$ . On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} JH & \xrightarrow{f^*} & JC \\ & \searrow h \quad \nearrow i_Y & \\ & JH/\langle \eta \rangle \simeq Y & \end{array}$$

où  $h$  est une isogénie de degré  $n$ . Soit  $\Theta$  un diviseur thêta dans  $JC$  et soit  $M = \mathcal{O}_Y(i_Y^* \Theta)$ . On a  $h^* M \simeq \mathcal{O}_{JH}(n\Theta_H)$  car  $(f^*)^* \Theta \equiv n\Theta_H$  ([20] 12.3.1.). D'après [25] (Lemme 2, pag. 232),  $K(M) \simeq \langle \eta \rangle^\perp / \langle \eta \rangle$ , où  $\langle \eta \rangle^\perp$  est l'orthogonale de  $\langle \eta \rangle$  par rapport à la forme de Weil  $e^{h^* M} : K(h^* M) \times K(h^* M) \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Puisque  $K(h^* M) \simeq (\mathbb{Z}/n)^{2g}$  on obtient donc  $K(M) \simeq (\mathbb{Z}/n)^{2(g-1)}$ . Ainsi  $M$  est une polarisation du type  $(1, n, \dots, n)$  et par [20] (Cor. 12.1.5.),  $\Xi = i_P^* \Theta$  est du type  $(1, \dots, 1, n, \dots, n)$ .

□

On note  $i : H \rightarrow H$  l'involution hyperelliptique. Par construction on a  $C = \text{Spec}(\mathcal{A})$ , où  $\mathcal{A} := \mathcal{O}_C \oplus \eta \oplus \dots \oplus \eta^{n-1}$  est muni d'une structure de  $\mathcal{O}_C$ -algèbre donnée par un isomorphisme  $\tau : \mathcal{O}_C \xrightarrow{\sim} \eta^n$ . On considère le changement de base

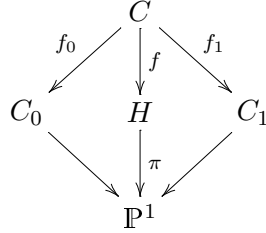
$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec}(i^* \mathcal{A}) = i^* C & \xrightarrow{j} & C = \text{Spec}(\mathcal{A}) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ H & \xrightarrow{i} & H \end{array}$$

Comme l'involution  $i$  agit sur  $JH$  par  $(-1)_{JH}$ , on peut choisir un isomorphisme  $\varphi : i^* \eta \xrightarrow{\sim} \eta^{-1}$  de façon que  $\varphi^{\otimes n} = \text{Id}$  via  $\tau$ . On obtient ainsi un isomorphisme de  $\mathcal{O}_C$ -algèbres  $\mathcal{A} \rightarrow i^* \mathcal{A} = i^* \mathcal{O}_C \oplus i^* \eta \oplus \dots \oplus i^* \eta^{n-1}$ . De cette façon on peut identifier  $i^* C$  à  $C$  et  $j$  à un automorphisme vérifiant  $j^2 = 1_C$ . Observons que ce relèvement à  $C$  de l'involution hyperelliptique n'est pas canonique car il dépend du choix de l'isomorphisme  $\varphi$ . Dans [21](Prop. 2.1.) on montre la proposition suivante

**Proposition 3.1.2** *Le revêtement  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  est galoisien avec groupe de Galois  $\text{Gal}(C/\mathbb{P}^1) = D_n = \langle j, \sigma \mid j^2 = \sigma^n = 1, j\sigma j = \sigma^{-1} \rangle$ .*

Le groupe diédral  $D_n = \langle j, \sigma \rangle$  contient les involutions  $j_\nu = j\sigma^\nu$  pour  $\nu = 0, \dots, n-1$ . Soient  $f_\nu : C \rightarrow C_\nu := C/\langle j_\nu \rangle$  les revêtements doubles ramifiés associés à ces involutions. Soit  $g_\nu$  le genre de  $C_\nu$ . On a donc le diagramme suivant

(3.2)



Soit  $W = \{x_1, \dots, x_{2g+2}\} \subset \mathbb{P}^1$  l'ensemble des points de Weierstrass pour le revêtement  $\pi : H \rightarrow \mathbb{P}^1$ ; on pose  $S = \{x \in W \mid (\pi \circ f)^{-1}(x) \text{ ne contient pas de point fixe par } j\}$  et  $T = W \setminus S$ .

**Proposition 3.1.3**

a) Pour  $n$  impair les courbes  $C_\nu$  sont de genre  $g_\nu = \frac{1}{2}(n-1)(g-1)$  pour  $\nu = 0, \dots, n-1$ .

b) Pour  $n$  pair  $g_\nu = \frac{n}{2}(g-1) + 1 - \frac{|T|}{2}$  pour  $\nu = 0, \dots, n-1$ .

*Démonstration :*

a) Il suffit de montrer la proposition pour  $\nu = 0$ . On observe que les images par  $f$  des points fixes par l'involution  $j = j_0$  sont des points de ramification du revêtement  $H \rightarrow \mathbb{P}^1$  puisque le diagramme (1) est commutatif. Soit  $q \in H$  un point fixe par  $i$  et  $p \in C$  un relèvement de  $q$ . Comme  $f$  est un revêtement non-ramifié,  $p$  est un point fixe par une involution  $j_m$  de  $C$  avec  $0 \leq m \leq n$ . Puisque  $n$  est impair, il existe un unique  $k$  modulo  $n$  qui vérifie l'équation  $2k \equiv m \pmod{n}$ . Donc,  $\sigma^k p \in f^{-1}(q)$  est le seul point fixe par  $j$  dans la fibre  $f^{-1}(q)$ . En effet, comme  $j\sigma = \sigma^{-1}j$  on a

$$j\sigma^k p = j\sigma^k j_m p = \sigma^{m-k} p = \sigma^{2k-k} p = \sigma^k p.$$

En conclusion  $S = \emptyset$  et on a autant de points fixes par  $j_\nu$  que de points de ramification du revêtement  $H \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Par la formule de Hurwitz on a

$$g(C) - 1 = 2(g_\nu - 1) + g + 1,$$

et on trouve que  $g_\nu = \frac{1}{2}(g(C) - g) = \frac{1}{2}(n(g-1) + 1 - g) = \frac{1}{2}(n-1)(g-1)$ .

b) Dans le cas  $n$  pair, sur certaines fibres au-dessus des points de ramification du revêtement  $\pi$ , l'involution  $j$  n'a pas de point fixe. On observe que si  $p \in \text{Fix}(j)$  alors  $\sigma^{\frac{n}{2}} p \in \text{Fix}(j)$  et qu'ils sont les seuls points fixés sur la fibre  $f^{-1}(f(p))$ . Donc, par la formule de Hurwitz

$$g(C) - 1 = 2g_\nu - 2 + |T|$$

et on obtient  $g_\nu = \frac{n}{2}(g-1) + 1 - \frac{|T|}{2}$ .

□

Les automorphismes  $\sigma$  et  $j$  induisent des automorphismes dans  $JC$ , notés aussi  $\sigma$  et  $j$ . Les applications  $f_\nu^* : JC_\nu \rightarrow JC$  sont injectives car les revêtements doubles sont ramifiés. On peut donc considérer les jacobiniennes  $JC_\nu$  comme des sous-variétés abéliennes de  $JC$ . Pour tout point  $c \in C$  on obtient le diagramme commutatif

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha_c} & JC \\ f_\nu \downarrow & & \downarrow N_{f_i} \\ C_\nu & \xrightarrow{\alpha_{f_\nu(c)}} & JC_\nu \end{array}$$

pour  $\nu = 0, \dots, n-1$ , où  $\alpha_c$  est l'application de Abel-Jacobi. On peut écrire  $JC_\nu = \text{Im}(1 + j_\nu)$  dans  $JC$ . De plus, comme  $\sigma(1 + j_\nu) = (1 + j_{\nu-2})\sigma$  l'automorphisme  $\sigma$  se restreint à des isomorphismes

$$\sigma : JC_\nu \rightarrow JC_{\nu-2} \quad \text{pour } \nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

On en déduit que, lorsque  $n$  est pair, il y a deux classes d'isomorphismes de jacobiniennes qu'on note  $JC_0$  et  $JC_1$ ; lorsque  $n$  est impair toutes les jacobiniennes  $JC_\nu$  sont isomorphes.

**Proposition 3.1.4** *Les sous-variétés  $JC_\nu$  sont contenues dans la variété de Prym  $P$ .*

*Démonstration :* On a  $P = \text{Ker}(1 + \sigma + \dots + \sigma^{n-1})^0$ . D'autre part

$$(1 + \sigma + \dots + \sigma^{n-1})(1 + j_\nu) = (1 + \sigma + \dots + \sigma^{n-1} + j + j_1 + \dots + j_{n-1})$$

se factorise par l'application Norme du revêtement  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  et donc est l'application nulle. En conséquence  $JC_\nu = \text{Im}(1 + j_\nu) \subset \text{Ker}(1 + \sigma + \dots + \sigma^{n-1})$ , et puisque  $JC_\nu$  est connexe on a  $JC_\nu \subset P$ .

□

Soient  $p_0$  et  $p_1$  les projections de  $JC_0 \times JC_1$  sur les deux facteurs correspondants.

**Théorème 3.1.1** *L'application  $\psi = p_0 + p_1 : JC_0 \times JC_1 \rightarrow P$  est un isomorphisme de variétés abéliennes pour  $n \geq 2$  non divisible par 4.*

*Démonstration :* Par la prop. 2.3 a)  $\dim P = (n-1)(g-1) = \dim(JC_0 \times JC_1)$  pour  $n$  impair. Lorsque  $n$  est pair on obtient de la proposition 2.3 que  $\dim JC_0 = g_0 = \frac{n}{2}(g-1) + 1 - t$  et  $\dim JC_1 = \frac{n}{2}(g-1) + 1 - s$  où  $t + s = g + 1$ . On a donc  $\dim(JC_0 \times JC_1) = (n-1)(g-1)$ . Comme  $\psi$  est bien un morphisme de variétés abéliennes il suffit de montrer que  $\psi$  est injective.

Soit  $(x, y) \in JC_0 \times JC_1$  tel que  $\psi(x, y) = x + y = 0$ . Alors  $x = (-y) \in JC_0 \cap JC_1$ . Le lemme suivant montre que nécessairement  $x = 0$  et donc aussi  $y = 0$ , ce qui termine la preuve. Voir [25] pag. 346 pour le cas  $n=2$ .

□



**Lemme 3.1.1**  $JC_0 \cap JC_1 = \{0\}$

*Démonstration :*

a) *Cas  $n$  impair.* Soit  $F \in JC_0 \cap JC_1 \subset \text{Ker}(1-j) \cap \text{Ker}(1-j_1) \subset \text{Fix}(j, \sigma)$ ; on a donc  $F \in \text{Fix}(\sigma) \cap P \subset \text{Fix}(\sigma) \cap \text{Ker}(1 + \sigma + \dots + \sigma^{n-1}) \subset JC[n]$ . Par ailleurs, comme  $\sigma^*F \simeq F$  et  $f$  étant étale cela implique que  $F = f^*L$  pour un fibré en droites  $L \in JH$ . Si de plus  $j^*F \simeq F$ , alors

$$j^*f^*L \simeq f^*i^*L \simeq f^*L.$$

Mais dans  $JH$  l'involution  $i$  agit par  $-1_{JH}$ , i.e.  $i^*L \simeq L^{-1}$ . On a donc  $f^*L^{-1} \simeq (f^*L)^{-1} \simeq f^*L$  et  $F = f^*L$  est un point de 2-torsion. On conclut que  $F \in \text{Fix}(j, \sigma) \cap P \subset JC[2] \cap JC[n] = \{0\}$ .

b) *Cas  $n=2m$ ,  $m$  impair.* Dans ce cas on utilise le résultat suivant qui est un cas particulier du Lemme de descente dû à Kempf ([12], Théorème 2.3) :

**Lemme 3.1.2** *Soit  $X$  une variété algébrique intègre sur laquelle opère un groupe fini  $G$ . Soit  $F$  un  $G$ -fibré vectoriel sur  $X$ . Alors  $F$  descend à  $X/G$  si et seulement si pour tout point  $x \in X$ , le stabilisateur de  $x$  dans  $G$  agit trivialement sur  $F_x$ .*

Soient  $X_i := C_i / \langle \sigma^m \rangle$  et  $X := C / \langle \sigma^m \rangle$ , où  $\sigma^m$  est une involution qui commute avec  $j$  et  $j_1$ . On considère la tour de courbes suivante

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow q_0 & \downarrow q & \searrow q_1 & \\ C_0 & \circlearrowleft & X & \circlearrowright & C_1 \\ \downarrow r_0 & \swarrow f_0 & \downarrow f & \searrow f_1 & \downarrow r_1 \\ X_0 & & H & & X_1 \\ & \searrow & \downarrow \pi & \swarrow & \\ & & \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

Soit  $F \in JC_0 \cap JC_1$ . On sait qu'il existe des fibrés en droites  $M_i \in JC_i$ ,  $i = 0, 1$  tels que  $q_i^*M_i \simeq F$ . Puisque  $j$  et  $\sigma^m$  commutent  $M_0$  est invariante par  $\sigma^m$ . En effet,

$$q_0^*\sigma^{m*}M_0 \simeq \sigma^{m*}q_0^*M_0 \simeq \sigma^{m*}F \simeq F \simeq q_0^*M_0.$$

Comme  $q_0$  est ramifié,  $q_0^*$  est injective et donc  $\sigma^{m*}M_0 \simeq M_0$ . Observons que les points de ramification du revêtement  $r_0 : C_0 \rightarrow X_0$ , i.e. les points fixes par  $\sigma^m$ , peuvent être relevés aux points fixes par  $j\sigma^m = j_m$  dans  $C$ . En effet, soit  $p \in \text{Fix}(\sigma^m)$  dans  $C_0$  et soit  $\tilde{p} \in C$  tel que  $q_0(\tilde{p}) = p$ . On a

$$q_0(\sigma^m \tilde{p}) = \sigma^m q_0(\tilde{p}) = \sigma^m p = p,$$

donc  $\sigma^m \tilde{p} \in q_0^{-1}(p) = \{\tilde{p}, j\tilde{p}\}$ . Comme  $q : C \rightarrow X$  est non-ramifié,  $\sigma^m \tilde{p} \neq \tilde{p}$ . Ainsi  $\sigma^m \tilde{p} = j\tilde{p}$  et on a  $j\sigma^m \tilde{p} = j_m \tilde{p} = \tilde{p}$ .

L'action de  $\sigma^m$  sur les fibres de  $M_0$  au-dessus des points de ramification de  $r_0$  est la même que celle de  $j_m$  sur les fibres de  $F$  au-dessus des points fixes par  $j_m$  dans  $C$  puisque  $q_0^* M_0 \simeq F$ .

Soit  $x \in \text{Fix}(j_m) \subset C$ , donc  $x = \sigma^{\frac{m+1}{2}} y$  ou bien  $x = \sigma^{\frac{3m+1}{2}} y$  où  $y \in \text{Fix}(j_1)$ . On observe que  $\langle j_m \rangle = \text{Stab}(x)$  est un sous-groupe conjugué de  $\langle j_1 \rangle$  qui par hypothèse agit trivialement sur  $F_y$ , donc  $j_m$  agit aussi trivialement sur  $F_x$ . On en déduit que  $\sigma^m$  agit trivialement sur  $M_{0,q_0(x)}$  et par le lemme de descente il existe un fibré  $N_0 \in JX_0$  tel que  $r_0^* N_0 \simeq M_0$ . De façon analogue on montre l'existence d'un fibré  $N_1 \in JX_1$  tel que  $r_1^* N_1 \simeq M_1$ .

Comme  $q^* f_0^* N_0 \simeq q^* f_1^* N_1 \simeq F$  on a

$$\beta := f_0^* N_0 \otimes (f_1^* N_1)^{-1} \in \text{Ker } q^*.$$

Puisque  $q$  est un revêtement double non-ramifié,  $\beta^2 \simeq \mathcal{O}_X$ , i.e.,  $\beta \in JX[2]$  mais aussi  $\beta \in JX_0 \times JX_1 \simeq \text{Prym}(X/H)$ , ce dernier isomorphisme ayant été démontré dans le cas *a*). Comme

$$q^* \beta \simeq \mathcal{O}_C \simeq \sigma^* \mathcal{O}_C \simeq \sigma^* q^* \beta \simeq q^* \sigma^* \beta$$

on a  $\sigma^* \beta \in \text{Ker } q^*$ . En fait  $\sigma^* \beta \simeq \beta$  et puisque  $\text{Prym}(X/H) \subset \text{Ker}(1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})$ , on a  $\beta \in JX[m] \cap JX[2] = \{0\}$ . Ainsi,  $f_0^* N_0 \simeq f_1^* N_1 \in JX_0 \cap JX_1 = \{0\}$  par *a*) et donc  $F \simeq q^* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_C$ .

□

### 3.2 La polarisation

On considère la polarisation  $\Xi$  dans  $JC_0 \times JC_1$ . On a  $\Xi \equiv \psi^* \Theta$ , où  $\Theta$  est la polarisation principale dans  $JC$ . On pose  $\phi = \phi_\Xi : JC_0 \times JC_1 \rightarrow \widehat{JC_0} \times \widehat{JC_1}$ . Donc  $\phi$  est de la forme

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha & \hat{\beta} \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

L'application  $\alpha : JC_0 \rightarrow \widehat{JC_0}$  est la restriction à  $JC_0$  de la polarisation principale de  $JC$ . Or, l'inclusion  $f_0^* : JC_0 \rightarrow JC$  est le pullback d'un revêtement double ramifié, et par [20] (12.3.1.) on obtient  $(f_0^*)^* \Theta \equiv 2\Theta_0$ , où  $\Theta_0$  est la polarisation principale dans  $JC_0$ . Ainsi  $\alpha = \phi_{2\Theta_0} = 2\phi_{\Theta_0}$ . De façon analogue, on obtient  $\delta = 2\phi_{\Theta_1} : JC_1 \rightarrow \widehat{JC_1}$ , où  $\Theta_1$  est la polarisation principale dans  $JC_1$ .

L'application  $\beta$  est l'application qui fait commuter le diagramme

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccc} JC & \xrightarrow{\phi_\Theta} & \widehat{JC} \\ f_0^* \uparrow & & \downarrow \widehat{f_1^*} \\ JC_0 & \xrightarrow{\beta} & \widehat{JC_1} \end{array}$$

donc  $\beta = \widehat{f_1^*} \circ \phi_\Theta \circ f_0^*$  et  $\hat{\beta} = \widehat{f_0^*} \circ \phi_\Theta \circ f_1^*$ . Pour expliciter  $\widehat{f_i^*}$  on considère le diagramme commutatif

$$(3.6) \quad \begin{array}{ccc} JC & \xrightarrow{\phi_\Theta} & \widehat{JC} \\ \widehat{f_i^*} \uparrow & & \uparrow \widehat{N_{f_i}} \\ JC_i & \xrightarrow{\phi_{\Theta_i}} & \widehat{JC_i} \end{array}$$

pour  $i = 0, 1$ , obtenu en appliquant le foncteur  $Pic^0$  au diagramme (3). Ensuite, en dualisant (6) on a

$$(3.7) \quad \begin{array}{ccc} \widehat{JC} & \xrightarrow{\phi_\Theta^{-1}} & JC \\ \widehat{f_i^*} \downarrow & & \downarrow N_{f_i} \\ \widehat{JC_i} & \xrightarrow{\phi_{\Theta_i}^{-1}} & JC_i \end{array}$$

pour  $i = 0, 1$ . On a donc  $\widehat{f_i^*} = \phi_{\Theta_i} \circ N_{f_i} \circ \phi_\Theta^{-1}$  et en utilisant le fait que  $N_{f_i} = 1 + j_i$  on obtient

$$\beta = \phi_{\Theta_1} \circ (1 + j_1) \circ f_0^* \quad \text{et} \quad \hat{\beta} = \phi_{\Theta_0} \circ (1 + j) \circ f_1^*.$$



# Annexe

Variables :

```
> Z:= array(0..2,0..2);
      Z := array(0..2, 0..2, [])
```

Tableau de polynômes invariants par le groupe de Heisenberg :

```
> T:= array(1..43);
      T := array(1..43, [])
```

Procédure, l'action du sous-groupe isotrope sur les indices de la base :

```
> q:=proc(n,t) RETURN( (n+t) mod 3 ) end;
      q := proc(n, t) RETURN((n + t) mod 3) end proc
```

L'action du sous-groupe isotrope sur les monômes :

```
> Act:=proc(r,s,P) RETURN( subs( {seq( seq( Z[i,j]=Z[q(r,i),q(s,j)]
> ,i=0..2),j=0..2 )} ,P ) ) end;
```

```
Act := proc(r, s, P)
  RETURN(subs({seq(seq( $Z_{i,j} = Z_{q(r,i),q(s,j)}$ ,  $i = 0..2$ ),  $j = 0..2$ )}, P))
end proc
```

Procédure pour engendrer un polynôme invariant :

```
> Gen:=proc(P) RETURN( sum( 'sum('Act(1,k,P)', 'l'=0..2)', k=0..2))
> end;
```

```
Gen := proc(P)
  RETURN(sum('sum('Act( $l, k, P$ ), ' $l = 0..2$ '),  $k = 0..2$ )) end proc
```

Remplissage du tableau :

> T[1] := Gen(Z[0,0]^6);

$$T_1 := Z_{0,0}^6 + Z_{1,0}^6 + Z_{2,0}^6 + Z_{0,1}^6 + Z_{1,1}^6 + Z_{2,1}^6 + Z_{0,2}^6 \\ + Z_{1,2}^6 + Z_{2,2}^6$$

> T[2] := Gen(Z[0,0]^3 \* Z[0,1]^3);

$$T_2 := Z_{0,0}^3 Z_{0,1}^3 + Z_{1,0}^3 Z_{1,1}^3 + Z_{2,0}^3 Z_{2,1}^3 + Z_{0,1}^3 Z_{0,2}^3 \\ + Z_{1,1}^3 Z_{1,2}^3 + Z_{2,1}^3 Z_{2,2}^3 + Z_{0,2}^3 Z_{0,0}^3 + Z_{1,2}^3 Z_{1,0}^3 + Z_{2,2}^3 Z_{2,0}^3$$

> T[3] := Gen(Z[0,0]^3 \* Z[1,0]^3);

$$T_3 := Z_{0,0}^3 Z_{1,0}^3 + Z_{1,0}^3 Z_{2,0}^3 + Z_{2,0}^3 Z_{0,0}^3 + Z_{0,1}^3 Z_{1,1}^3 \\ + Z_{1,1}^3 Z_{2,1}^3 + Z_{2,1}^3 Z_{0,1}^3 + Z_{0,2}^3 Z_{1,2}^3 + Z_{1,2}^3 Z_{2,2}^3 + Z_{2,2}^3 Z_{0,2}^3$$

> T[4] := Gen(Z[0,0]^3 \* Z[1,1]^3);

$$T_4 := Z_{0,0}^3 Z_{1,1}^3 + Z_{1,0}^3 Z_{2,1}^3 + Z_{2,0}^3 Z_{0,1}^3 + Z_{0,1}^3 Z_{1,2}^3 \\ + Z_{1,1}^3 Z_{2,2}^3 + Z_{2,1}^3 Z_{0,2}^3 + Z_{0,2}^3 Z_{1,0}^3 + Z_{1,2}^3 Z_{2,0}^3 + Z_{2,2}^3 Z_{0,0}^3$$

> T[5] := Gen(Z[0,0]^3 \* Z[1,2]^3);

$$T_5 := Z_{0,0}^3 Z_{1,2}^3 + Z_{1,0}^3 Z_{2,2}^3 + Z_{2,0}^3 Z_{0,2}^3 + Z_{0,1}^3 Z_{1,0}^3 \\ + Z_{1,1}^3 Z_{2,0}^3 + Z_{2,1}^3 Z_{0,0}^3 + Z_{0,2}^3 Z_{1,1}^3 + Z_{1,2}^3 Z_{2,1}^3 + Z_{2,2}^3 Z_{0,1}^3$$

> T[6] := Gen(Z[0,0]^4 \* Z[0,1] \* Z[0,2]);

$$T_6 := Z_{0,0}^4 Z_{0,1} Z_{0,2} + Z_{1,0}^4 Z_{1,1} Z_{1,2} + Z_{2,0}^4 Z_{2,1} Z_{2,2} \\ + Z_{0,1}^4 Z_{0,2} Z_{0,0} + Z_{1,1}^4 Z_{1,2} Z_{1,0} + Z_{2,1}^4 Z_{2,2} Z_{2,0} \\ + Z_{0,2}^4 Z_{0,0} Z_{0,1} + Z_{1,2}^4 Z_{1,0} Z_{1,1} + Z_{2,2}^4 Z_{2,0} Z_{2,1}$$

> T[7] := Gen(Z[0,0] \* Z[0,1] \* Z[0,2] \* Z[1,0]^3);

$$T_7 := Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{1,0}^3 + Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{2,0}^3 + Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{0,0}^3 \\ + Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{1,1}^3 + Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{2,1}^3 + Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{0,1}^3 \\ + Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{1,2}^3 + Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{2,2}^3 + Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{0,2}^3$$

> T[8] := Gen(Z[0,0] \* Z[0,1] \* Z[0,2] \* Z[2,0]^3);

$$T_8 := Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{2,0}^3 + Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{0,0}^3 + Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{1,0}^3 \\ + Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{2,1}^3 + Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{0,1}^3 + Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{1,1}^3 \\ + Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{2,2}^3 + Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{0,2}^3 + Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{1,2}^3$$

> T[9] := Gen(Z[0,0]^4 \* Z[1,0] \* Z[2,0]);

$$\begin{aligned} T_9 := & Z_{0,0}^4 Z_{1,0} Z_{2,0} + Z_{1,0}^4 Z_{2,0} Z_{0,0} + Z_{2,0}^4 Z_{0,0} Z_{1,0} \\ & + Z_{0,1}^4 Z_{1,1} Z_{2,1} + Z_{1,1}^4 Z_{2,1} Z_{0,1} + Z_{2,1}^4 Z_{0,1} Z_{1,1} \\ & + Z_{0,2}^4 Z_{1,2} Z_{2,2} + Z_{1,2}^4 Z_{2,2} Z_{0,2} + Z_{2,2}^4 Z_{0,2} Z_{1,2} \end{aligned}$$

> T[10] := Gen(Z[0,0] \* Z[1,0] \* Z[2,0] \* Z[0,1]^3);

$$\begin{aligned} T_{10} := & Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{0,1}^3 + Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{1,1}^3 + Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{2,1}^3 \\ & + Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{0,2}^3 + Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{1,2}^3 + Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,2}^3 \\ & + Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{0,0}^3 + Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{1,0}^3 + Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{2,0}^3 \end{aligned}$$

> T[11] := Gen(Z[0,0] \* Z[1,0] \* Z[2,0] \* Z[0,2]^3);

$$\begin{aligned} T_{11} := & Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{0,2}^3 + Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{1,2}^3 + Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{2,2}^3 \\ & + Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{0,0}^3 + Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{1,0}^3 + Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,0}^3 \\ & + Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{0,1}^3 + Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{1,1}^3 + Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{2,1}^3 \end{aligned}$$

> T[12] := Gen(Z[0,0]^4 \* Z[1,1] \* Z[2,2]);

$$\begin{aligned} T_{12} := & Z_{0,0}^4 Z_{1,1} Z_{2,2} + Z_{1,0}^4 Z_{2,1} Z_{0,2} + Z_{2,0}^4 Z_{0,1} Z_{1,2} \\ & + Z_{0,1}^4 Z_{1,2} Z_{2,0} + Z_{1,1}^4 Z_{2,2} Z_{0,0} + Z_{2,1}^4 Z_{0,2} Z_{1,0} \\ & + Z_{0,2}^4 Z_{1,0} Z_{2,1} + Z_{1,2}^4 Z_{2,0} Z_{0,1} + Z_{2,2}^4 Z_{0,0} Z_{1,1} \end{aligned}$$

> T[13] := Gen(Z[0,0] \* Z[1,1] \* Z[2,2] \* Z[0,1]^3);

$$\begin{aligned} T_{13} := & Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{0,1}^3 + Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,1}^3 + Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{2,1}^3 \\ & + Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{0,2}^3 + Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{1,2}^3 + Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{2,2}^3 \\ & + Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{0,0}^3 + Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{1,0}^3 + Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{2,0}^3 \end{aligned}$$

> T[14] := Gen(Z[0,0] \* Z[1,1] \* Z[2,2] \* Z[0,2]^3);

$$\begin{aligned} T_{14} := & Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{0,2}^3 + Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,2}^3 + Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{2,2}^3 \\ & + Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{0,0}^3 + Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{1,0}^3 + Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{2,0}^3 \\ & + Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{0,1}^3 + Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{1,1}^3 + Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{2,1}^3 \end{aligned}$$

> T[15] := Gen(Z[0,0]^4 \* Z[1,2] \* Z[2,1]);

$$\begin{aligned} T_{15} := & Z_{0,0}^4 Z_{1,2} Z_{2,1} + Z_{1,0}^4 Z_{2,2} Z_{0,1} + Z_{2,0}^4 Z_{0,2} Z_{1,1} \\ & + Z_{0,1}^4 Z_{1,0} Z_{2,2} + Z_{1,1}^4 Z_{2,0} Z_{0,2} + Z_{2,1}^4 Z_{0,0} Z_{1,2} \\ & + Z_{0,2}^4 Z_{1,1} Z_{2,0} + Z_{1,2}^4 Z_{2,1} Z_{0,0} + Z_{2,2}^4 Z_{0,1} Z_{1,0} \end{aligned}$$

> T[16] := Gen(Z[0,0]\*Z[1,2]\*Z[2,1]\*Z[1,0]^3);

$$T_{16} := Z_{0,0} Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{1,0}^3 + Z_{1,0} Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{2,0}^3 + Z_{2,0} Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{0,0}^3 \\ + Z_{0,1} Z_{1,0} Z_{2,2} Z_{1,1}^3 + Z_{1,1} Z_{2,0} Z_{0,2} Z_{2,1}^3 + Z_{2,1} Z_{0,0} Z_{1,2} Z_{0,1}^3 \\ + Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{2,0} Z_{1,2}^3 + Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{0,0} Z_{2,2}^3 + Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{1,0} Z_{0,2}^3$$

> T[17] := Gen(Z[0,0]\*Z[1,2]\*Z[2,1]\*Z[2,0]^3);

$$T_{17} := Z_{0,0} Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{2,0}^3 + Z_{1,0} Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{0,0}^3 + Z_{2,0} Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{1,0}^3 \\ + Z_{0,1} Z_{1,0} Z_{2,2} Z_{2,1}^3 + Z_{1,1} Z_{2,0} Z_{0,2} Z_{0,1}^3 + Z_{2,1} Z_{0,0} Z_{1,2} Z_{1,1}^3 \\ + Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{2,0} Z_{2,2}^3 + Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{0,0} Z_{0,2}^3 + Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{1,0} Z_{1,2}^3$$

> T[18] := 1/3\*Gen(Z[0,0]^2\*Z[0,1]^2\*Z[0,2]^2);

$$T_{18} := Z_{0,0}^2 Z_{0,1}^2 Z_{0,2}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{1,1}^2 Z_{1,2}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{2,1}^2 Z_{2,2}^2$$

> T[19] := 1/3\*Gen(Z[0,0]^2\*Z[1,0]^2\*Z[2,0]^2);

$$T_{19} := Z_{0,0}^2 Z_{1,0}^2 Z_{2,0}^2 + Z_{0,1}^2 Z_{1,1}^2 Z_{2,1}^2 + Z_{0,2}^2 Z_{1,2}^2 Z_{2,2}^2$$

> T[20] := 1/3\*Gen(Z[0,0]^2\*Z[1,1]^2\*Z[2,2]^2);

$$T_{20} := Z_{0,0}^2 Z_{1,1}^2 Z_{2,2}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{2,1}^2 Z_{0,2}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{0,1}^2 Z_{1,2}^2$$

> T[21] := 1/3\*Gen(Z[0,0]^2\*Z[2,1]^2\*Z[1,2]^2);

$$T_{21} := Z_{0,0}^2 Z_{2,1}^2 Z_{1,2}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{0,1}^2 Z_{2,2}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{1,1}^2 Z_{0,2}^2$$

> T[22] := 1/3\*Gen(Z[0,0]\*Z[0,1]\*Z[0,2]\*Z[1,0]\*Z[1,1]\*Z[1,2]);

$$T_{22} := Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{1,2} + Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{2,2} \\ + Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{0,2}$$

> T[23] := 1/3\*Gen(Z[0,0]\*Z[1,0]\*Z[2,0]\*Z[0,1]\*Z[1,1]\*Z[2,1]);

$$T_{23} := Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,1} + Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{2,2} \\ + Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{2,0}$$

> T[24] := 1/3\*Gen(Z[0,0]\*Z[1,1]\*Z[2,2]\*Z[0,1]\*Z[1,2]\*Z[2,0]);

$$T_{24} := Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{2,0} + Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{0,0} \\ + Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,0}$$

> T[25] := 1/3\*Gen(Z[0,0]\*Z[1,2]\*Z[2,1]\*Z[0,1]\*Z[1,0]\*Z[2,2]);

$$T_{25} := Z_{0,0} Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{1,0} Z_{2,2} + Z_{1,0} Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,0} Z_{0,2} \\ + Z_{2,0} Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{0,0} Z_{1,2}$$



$$> \quad T[26] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[0,1] * Z[1,1] * Z[1,2]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{26} := & Z_{0,0}^2 Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{1,2}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{2,2}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{0,2}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{1,0}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{2,0}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{0,0}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{1,1}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{2,1}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{0,1}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[27] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[0,2] * Z[1,2] * Z[1,1]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{27} := & Z_{0,0}^2 Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{1,1}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{2,1}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{0,1}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{1,2}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{2,2}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{0,2}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{1,0}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{2,0}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{0,0}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[28] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[1,1] * Z[2,1] * Z[0,2]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{28} := & Z_{0,0}^2 Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{0,2}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{1,2}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,2}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{0,0}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{1,0}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{2,0}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{0,1}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{1,1}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{2,1}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[29] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[1,0] * Z[1,1] * Z[2,1]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{29} := & Z_{0,0}^2 Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{2,1}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{0,1}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{1,1}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{2,2}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{0,2}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{1,2}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{2,0}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{0,0}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{1,0}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[30] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[1,0] * Z[1,2] * Z[2,2]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{30} := & Z_{0,0}^2 Z_{1,0} Z_{1,2} Z_{2,2}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{2,0} Z_{2,2} Z_{0,2}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{0,0} Z_{0,2} Z_{1,2}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{1,1} Z_{1,0} Z_{2,0}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{2,1} Z_{2,0} Z_{0,0}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{0,1} Z_{0,0} Z_{1,0}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{1,2} Z_{1,1} Z_{2,1}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{2,2} Z_{2,1} Z_{0,1}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{0,2} Z_{0,1} Z_{1,1}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[31] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[1,1] * Z[1,2] * Z[2,0]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{31} := & Z_{0,0}^2 Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{2,0}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{0,0}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{1,0}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{2,1}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{0,1}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{1,1}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{2,2}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{0,2}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{1,2}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[32] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[0,1] * Z[1,2] * Z[1,0]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{32} := & Z_{0,0}^2 Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{1,0}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{2,0}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{0,0}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{1,1}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{2,1}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{0,1}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{1,2}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{2,2}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{0,2}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[33] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[0,2] * Z[1,1] * Z[1,0]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{33} := & Z_{0,0}^2 Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{1,0}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{2,0}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{0,0}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{0,0} Z_{1,2} Z_{1,1}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{1,0} Z_{2,2} Z_{2,1}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{2,0} Z_{0,2} Z_{0,1}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{0,1} Z_{1,0} Z_{1,2}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{1,1} Z_{2,0} Z_{2,2}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{2,1} Z_{0,0} Z_{0,2}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[34] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[1,0] * Z[2,1] * Z[0,1]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{34} := & Z_{0,0}^2 Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{0,1}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{1,1}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{2,1}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{0,2}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,2}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{2,2}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{0,0}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{1,0}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{2,0}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[35] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[1,0] * Z[2,2] * Z[0,2]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{35} := & Z_{0,0}^2 Z_{1,0} Z_{2,2} Z_{0,2}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{2,0} Z_{0,2} Z_{1,2}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{0,0} Z_{1,2} Z_{2,2}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{1,1} Z_{2,0} Z_{0,0}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{2,1} Z_{0,0} Z_{1,0}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{0,1} Z_{1,0} Z_{2,0}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{0,1}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{1,1}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{2,1}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[36] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[1,0] * Z[0,1] * Z[1,1]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{36} := & Z_{0,0}^2 Z_{1,0} Z_{0,1} Z_{1,1}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{2,0} Z_{1,1} Z_{2,1}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{0,0} Z_{2,1} Z_{0,1}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{1,1} Z_{0,2} Z_{1,2}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{2,1} Z_{1,2} Z_{2,2}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{0,1} Z_{2,2} Z_{0,2}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{1,2} Z_{0,0} Z_{1,0}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{2,2} Z_{1,0} Z_{2,0}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{0,2} Z_{2,0} Z_{0,0}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[37] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[0,1] * Z[2,0] * Z[2,1]^2);$$

$$\begin{aligned} T_{37} := & Z_{0,0}^2 Z_{0,1} Z_{2,0} Z_{2,1}^2 + Z_{1,0}^2 Z_{1,1} Z_{0,0} Z_{0,1}^2 + Z_{2,0}^2 Z_{2,1} Z_{1,0} Z_{1,1}^2 \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{0,2} Z_{2,1} Z_{2,2}^2 + Z_{1,1}^2 Z_{1,2} Z_{0,1} Z_{0,2}^2 + Z_{2,1}^2 Z_{2,2} Z_{1,1} Z_{1,2}^2 \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{0,0} Z_{2,2} Z_{2,0}^2 + Z_{1,2}^2 Z_{1,0} Z_{0,2} Z_{0,0}^2 + Z_{2,2}^2 Z_{2,0} Z_{1,2} Z_{1,0}^2 \end{aligned}$$

$$> \quad T[38] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[0,1] * Z[0,2] * Z[1,0] * Z[2,0]);$$

$$\begin{aligned} T_{38} := & Z_{0,0}^2 Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{2,0} + Z_{1,0}^2 Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{0,0} + Z_{2,0}^2 Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{1,0} \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{2,1} + Z_{1,1}^2 Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{0,1} + Z_{2,1}^2 Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{1,1} \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{2,2} + Z_{1,2}^2 Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{0,2} + Z_{2,2}^2 Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{1,2} \end{aligned}$$

$$> \quad T[39] := \text{Gen}(Z[0,0]^2 * Z[0,1] * Z[0,2] * Z[1,1] * Z[2,2]);$$

$$\begin{aligned} T_{39} := & Z_{0,0}^2 Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{1,1} Z_{2,2} + Z_{1,0}^2 Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{2,1} Z_{0,2} + Z_{2,0}^2 Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{0,1} Z_{1,2} \\ & + Z_{0,1}^2 Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{1,2} Z_{2,0} + Z_{1,1}^2 Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{2,2} Z_{0,0} + Z_{2,1}^2 Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{0,2} Z_{1,0} \\ & + Z_{0,2}^2 Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{1,0} Z_{2,1} + Z_{1,2}^2 Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{2,0} Z_{0,1} + Z_{2,2}^2 Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{0,0} Z_{1,1} \end{aligned}$$

> T[40] := Gen(Z[0,0]^2\*Z[0,1]\*Z[0,2]\*Z[1,2]\*Z[2,1]);

$$T_{40} := Z_{0,0}^2 Z_{0,1} Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{2,1} + Z_{1,0}^2 Z_{1,1} Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{0,1} + Z_{2,0}^2 Z_{2,1} Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{1,1} \\ + Z_{0,1}^2 Z_{0,2} Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{2,2} + Z_{1,1}^2 Z_{1,2} Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{0,2} + Z_{2,1}^2 Z_{2,2} Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{1,2} \\ + Z_{0,2}^2 Z_{0,0} Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{2,0} + Z_{1,2}^2 Z_{1,0} Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{0,0} + Z_{2,2}^2 Z_{2,0} Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{1,0}$$

> T[41] := Gen(Z[0,0]^2\*Z[1,0]\*Z[2,0]\*Z[1,1]\*Z[2,2]);

$$T_{41} := Z_{0,0}^2 Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{1,1} Z_{2,2} + Z_{1,0}^2 Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{2,1} Z_{0,2} + Z_{2,0}^2 Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{0,1} Z_{1,2} \\ + Z_{0,1}^2 Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{1,2} Z_{2,0} + Z_{1,1}^2 Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{2,2} Z_{0,0} + Z_{2,1}^2 Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{0,2} Z_{1,0} \\ + Z_{0,2}^2 Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{1,0} Z_{2,1} + Z_{1,2}^2 Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{2,0} Z_{0,1} + Z_{2,2}^2 Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{0,0} Z_{1,1}$$

> T[42] := Gen(Z[0,0]^2\*Z[1,0]\*Z[2,0]\*Z[1,2]\*Z[2,1]);

$$T_{42} := Z_{0,0}^2 Z_{1,0} Z_{2,0} Z_{1,2} Z_{2,1} + Z_{1,0}^2 Z_{2,0} Z_{0,0} Z_{2,2} Z_{0,1} + Z_{2,0}^2 Z_{0,0} Z_{1,0} Z_{0,2} Z_{1,1} \\ + Z_{0,1}^2 Z_{1,1} Z_{2,1} Z_{1,0} Z_{2,2} + Z_{1,1}^2 Z_{2,1} Z_{0,1} Z_{2,0} Z_{0,2} + Z_{2,1}^2 Z_{0,1} Z_{1,1} Z_{0,0} Z_{1,2} \\ + Z_{0,2}^2 Z_{1,2} Z_{2,2} Z_{1,1} Z_{2,0} + Z_{1,2}^2 Z_{2,2} Z_{0,2} Z_{2,1} Z_{0,0} + Z_{2,2}^2 Z_{0,2} Z_{1,2} Z_{0,1} Z_{1,0}$$

> T[43] := Gen(Z[0,0]^2\*Z[1,1]\*Z[2,2]\*Z[1,2]\*Z[2,1]);

$$T_{43} := Z_{0,0}^2 Z_{1,1} Z_{2,2} Z_{1,2} Z_{2,1} + Z_{1,0}^2 Z_{2,1} Z_{0,2} Z_{2,2} Z_{0,1} + Z_{2,0}^2 Z_{0,1} Z_{1,2} Z_{0,2} Z_{1,1} \\ + Z_{0,1}^2 Z_{1,2} Z_{2,0} Z_{1,0} Z_{2,2} + Z_{1,1}^2 Z_{2,2} Z_{0,0} Z_{2,0} Z_{0,2} + Z_{2,1}^2 Z_{0,2} Z_{1,0} Z_{0,0} Z_{1,2} \\ + Z_{0,2}^2 Z_{1,0} Z_{2,1} Z_{1,1} Z_{2,0} + Z_{1,2}^2 Z_{2,0} Z_{0,1} Z_{2,1} Z_{0,0} + Z_{2,2}^2 Z_{0,0} Z_{1,1} Z_{0,1} Z_{1,0}$$

Procédure pour restreindre aux 4 plans correspondants aux points de la forme (x, 00) :

```
> H:=proc(P,r,s)    x:=P; for j from 0 to 2 do for i from 0 to
2 do if
> q(r*i,s*j) <> 0 then      x:=subs(Z[i,j]=0,x) else end if od
od;
> RETURN(x) end;
```

**H := proc(P, r, s)**

**local x, j, i;**

**x := P;**

**for j from 0 to 2 do for i from 0 to 2 do**

**if q(r \* i, s \* j) ≠ 0 then x := subs(Z<sub>i,j</sub> = 0, x) else end if**

**end do**

**end do;**

**RETURN(x)**

**end proc**

```
> M:= array(1..39);
```

```

M := array(1..39, [])

> x:=1; for i from 1 to 43 do if H(T[i],0,1)=0 then M[x]:=T[i];
> x:=x+1 else end if od: print(x);
40

> M2:= array(1..39);
M2 := array(1..39, [])

> x2:=1; for i from 1 to 39 do if H(M[i],1,0)=0 then M2[x2]:=M[i];
> x2:=x2+1 else end if od:
> print(x2);
37

> M3:= array(1..39);
M3 := array(1..39, [])

> x3:=1; for i from 1 to 39 do if H(M2[i],1,1)=0 then M3[x3]:=M2[i];
> x3:=x3+1 else end if od:
> print(x3);
34

> M4:= array(1..39);
M4 := array(1..39, [])

> x4:=1; for i from 1 to 39 do if H(M3[i],1,2)=0 then M4[x4]:=M3[i];
> x4:=x4+1 else end if od:
> print(x4);
31

```

On déduit que le rang de l'image de l'application  $\nu$  est au moins 13.  
On réduit à 30 la dimension de l'espace de départ.

Variables dans un plan de points fixes :

```

> Y:=array(0..2);
Y := array(0..2, [])

> with(linalg);

```

Matrice de coefficients :

```

> C:=matrix(144,30);
C := array(1..144, 1..30, [])

```

Il y a 36 espaces de sextiques  $K_\eta$ -invariantes  $(S^6 V_\eta)^{K_\eta}$ , chacun de dimension 4.

Matrice de polynômes restreints aux espaces  $V_\eta$  :

```
> N:=matrix(36,30);
      N := array(1..36, 1..30, [])
> for i from 1 to 36 do for j from 1 to 30 do N[i,j]:= M4[j]
od od ;
```

Produit scalaire :

```
> prod:= proc(u,v,x1,x2) RETURN( (u*x1 + v*x2) mod 3) end;
prod := proc(u, v, x1, x2) RETURN((u * x1 + v * x2) mod 3) end proc
```

Restriction aux sous-espaces de points fixes correspondants aux points la forme  $(01, x^*)$  :

```
> for u from 0 to 2 do
> for v from 0 to 2 do b:=3*u+v+1;
> for j from 1 to 30 do
> N[b,j]:= subs({Z[0,0]=Y[0], Z[0,2]=w^prod(u,v,0,1)*Y[0],
> Z[0,1]=Y[0], Z[1,0]=Y[1],
> Z[1,2]=w^prod(u,v,2,1)*Y[1], Z[1,1]=w^prod(u,v,1,0)*Y[1],
> Z[2,0]=Y[2], Z[2,2]=w^prod(u,v,1,1)*Y[2],
> Z[2,1]=w^prod(u,v,2,0)*Y[2]},N[b,j]);
> N[b,j]:=subs({w^4=w,w^5=w^2,w^6=1,w^3=1,w^7=w,w^8=w^2,
> w^9=1,w^10=w },N[b,j]); simplify (N[b,j])
> od; od od;
```

Remplissage de la matrice de coefficients :

```
> for u from 0 to 2 do
> for v from 0 to 2 do b:=3*u+v+1;
> for j from 1 to 30 do
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b,j]), Y[0]^2)=0
> then C[4*(b-1)+1,j]:=0
> else C[4*(b-1)+1,j]:=lcoeff(N[b,j], [Y[0],Y[1],Y[2]], 't')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b,j]), Y[0]^3)=0
> then C[4*(b-1)+2,j]:=0
> else C[4*(b-1)+2,j]:=lcoeff(N[b,j], [Y[0],Y[1],Y[2]], 't')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b,j]), Y[0]^4)=0
> then C[4*(b-1)+3,j]:=0
> else C[4*(b-1)+3,j]:=lcoeff(N[b,j], [Y[0],Y[1],Y[2]], 't')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b,j]), Y[0]^6)=0
> then C[4*(b-1)+4,j]:=0
> else C[4*(b-1)+4,j]:=lcoeff(N[b,j], [Y[0],Y[1],Y[2]], 't')
> end if;
> od: od od;
```

Restriction aux sous-espaces avec  $\eta = (10, x^*)$  :

```
> for u from 0 to 2 do
> for v from 0 to 2 do b:=3*u+v+1;
> for j from 1 to 30 do
> N[b+9,j] := subs({Z[0,0]=Y[0], Z[2,0]=w^prod(u,v,1,0)*Y[0],
> Z[1,0]=Y[0], Z[0,1]=Y[1], Z[2,1]=w^prod(u,v,1,2)*Y[1],
> Z[1,1]=w^prod(u,v,0,1)*Y[1], Z[0,2]=Y[2],
> Z[2,2]=w^prod(u,v,1,1)*Y[2],
> Z[1,2]=w^prod(u,v,0,2)*Y[2]}, N[b+9,j]);
> N[b+9,j] := subs({w^4=w, w^5=w^2, w^6=1, w^3=1, w^7=w, w^8=w^2,
> w^9=1, w^10=w }, N[b+9,j]);
> simplify (N[b+9,j])
> od; od od;

> for u from 0 to 2 do
> for v from 0 to 2 do b:=3*u+v+1;
> for j from 1 to 30 do
> if coeff(subs({Y[1]=1, Y[2]=1}, N[b+9,j]), Y[0]^2)=0
> then C[4*(b+8)+1,j] := 0
> else C[4*(b+8)+1,j] := lcoeff(N[b+9,j], [Y[0], Y[1], Y[2]], 't')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1, Y[2]=1}, N[b+9,j]), Y[0]^3)=0
> then C[4*(b+8)+2,j] := 0
> else C[4*(b+8)+2,j] := lcoeff(N[b+9,j], [Y[0], Y[1], Y[2]], 't')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1, Y[2]=1}, N[b+9,j]), Y[0]^4)=0
> then C[4*(b+8)+3,j] := 0
> else C[4*(b+8)+3,j] := lcoeff(N[b+9,j], [Y[0], Y[1], Y[2]], 't')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1, Y[2]=1}, N[b+9,j]), Y[0]^6)=0
> then C[4*(b+8)+4,j] := 0
> else C[4*(b+8)+4,j] := lcoeff(N[b+9,j], [Y[0], Y[1], Y[2]], 't')
> end if;
> od: od od;
```

Restriction aux sous-espaces avec  $\eta = (11, x^*)$  :

```
> for u from 0 to 2 do
> for v from 0 to 2 do b:=3*u+v+1;
> for j from 1 to 30 do
> N[b+18,j] := subs({Z[0,0]=Y[0], Z[2,2]=w^prod(u,v,1,1)*Y[0],
> Z[1,1]=Y[0], Z[0,1]=Y[1],
> Z[2,0]=w^prod(u,v,1,0)*Y[1], Z[1,2]=w^prod(u,v,0,1)*Y[1],
> Z[0,2]=Y[2], Z[2,1]=w^prod(u,v,1,2)*Y[2],
> Z[1,0]=w^prod(u,v,0,2)*Y[2]}, N[b+18,j]);
> N[b+18,j] := subs({w^4=w, w^5=w^2, w^6=1, w^3=1, w^7=w, w^8=w^2,
> w^9=1, w^10=w }, N[b+18,j]);
> simplify (N[b+18,j])
> od; od od;
```

```

> for u from 0 to 2 do
> for v from 0 to 2 do b:=3*u+v+1;
> for j from 1 to 30 do
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b+18,j]), Y[0]^2)=0
> then C[4*(b+17)+1,j]:=0
> else C[4*(b+17)+1,j]:=lcoeff(N[b+18,j],[Y[0],Y[1],Y[2]],'t')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b+18,j]), Y[0]^3)=0
> then C[4*(b+17)+2,j]:=0
> else C[4*(b+17)+2,j]:=lcoeff(N[b+18,j],[Y[0],Y[1],Y[2]],'t')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b+18,j]), Y[0]^4)=0
> then C[4*(b+17)+3,j]:=0
> else C[4*(b+17)+3,j]:=lcoeff(N[b+18,j],[Y[0],Y[1],Y[2]],'t')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b+18,j]), Y[0]^6)=0
> then C[4*(b+17)+4,j]:=0
> else C[4*(b+17)+4,j]:=lcoeff(N[b+18,j],[Y[0],Y[1],Y[2]],'t')
> end if;
> od: od od;

```

Restriction aux sous-espaces avec  $\eta = (12, x^*)$  :

```

> for u from 0 to 2 do
> for v from 0 to 2 do b:=3*u+v+1;
> for j from 1 to 30 do
> N[b+27,j] := subs({Z[0,0]=Y[0], Z[2,1]=w^prod(u,v,1,2)*Y[0],
> Z[1,2]=Y[0], Z[0,1]=Y[1], Z[2,2]=w^prod(u,v,1,1)*Y[1],
> Z[1,0]=w^prod(u,v,0,1)*Y[1], Z[0,2]=Y[2],
> Z[2,0]=w^prod(u,v,1,0)*Y[2],
> Z[1,1]=w^prod(u,v,0,2)*Y[2]},N[b+27,j]);
> N[b+27,j] := subs({w^4=w, w^5=w^2, w^6=1, w^3=1, w^7=w, w^8=w^2,
> w^9=1, w^10=w },N[b+27,j]);
> simplify (N[b+27,j])
> od; od od;

```

```

> for u from 0 to 2 do
> for v from 0 to 2 do b:=3*u+v+1;
> for j from 1 to 30 do
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b+27,j]), Y[0]^2)=0
> then C[4*(b+26)+1,j]:=0
> else C[4*(b+26)+1,j]:=lcoeff(N[b+27,j],[Y[0],Y[1],Y[2]],'t')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b+27,j]), Y[0]^3)=0
> then C[4*(b+26)+2,j]:=0
> else C[4*(b+26)+2,j]:=lcoeff(N[b+27,j],[Y[0],Y[1],Y[2]],'t')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b+27,j]), Y[0]^4)=0
> then C[4*(b+26)+3,j]:=0
> else C[4*(b+26)+3,j]:=lcoeff(N[b+27,j],[Y[0],Y[1],Y[2]],'t')
> end if;
> if coeff(subs({Y[1]=1,Y[2]=1},N[b+27,j]),
> Y[0]^6)=0 then C[4*(b+26)+4,j]:=0
> else C[4*(b+26)+4,j]:=lcoeff(N[b+27,j],[Y[0],Y[1],Y[2]],'t')
> end if;
> od: od od;

```

```

> e:=array(1..144);

```

```

          e:=array(1..144,[])

```

```

> for i from 1 to 144 do e[i]:=0 od:

```

Calcul du rang de la matrice de coefficients et d'une base pour le noyau de  $\nu$  :

```

> linsolve(C,e,'r');

```

```

      [ 0, 0, -t1, t1, -t2, t2, -t3, t3, 0, 0, 0, 0, 0,
        0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ]

```

```

> r;

```

27

Et donc une base pour le noyau de  $\nu$  est donnée par :

$$\omega_1 := T[11] - T[10]$$

$$\omega_2 := T[14] - T[13]$$

$$\omega_3 := T[17] - T[16]$$



# Bibliographie

- [1] W. Barth, C. Peters, A. Van-de-Ven : *Compact complex surfaces*. Berlin, New York : Springer-Verlag (1984).
- [2] W. Barth : *Quadratic equations for level-3 abelian surfaces*. Abelian varieties (Egloffstein,1993), 1-18, de Gruyter, Berlin (1995).
- [3] A. Beauville : *Fibrés de rang 2 sur les courbes, fibré déterminant et fonctions thêta*. Bull. Soc. Math. France 116, 431-438 (1988).
- [4] A. Beauville : *Vector bundles on curves and generalized theta functions : recent results and open problems*. Current topics in complex algebraic geometry, MSRI Publications 28, 17-33, Cambridge University Press (1995).
- [5] A. Beauville : *The Coble hypersurfaces*. Preprint (2003).
- [6] A. Beauville, M.S. Narasimhan, S. Ramanan : *Spectral curves and the generalised theta divisor*. J. Reine angew. Math. 398, 169-179 (1989).
- [7] N. Bourbaki : *Éléments de mathématiques : groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4 à 6*. Paris : Masson, (1981).
- [8] S. Brivio, A. Verra : *The Theta divisor of  $SU_C(2,2d)^s$  is very ample if  $C$  is not hyperelliptic*. Duke Math. J. 82, no. 3, 503-552. (1996).
- [9] A. Coble : *Point sets and allied cremona groups III*. Trans. Amer. Math. Soc. 18, 331-372 (1917).
- [10] A. Coble : *Algebraic geometry and theta functions*. AMS Coll. Publi. 10, Providence, 1929 (3ème. edition, 1969).
- [11] U.V. Desale, S. Ramanan : *Classification of vector bundles de rank 2 on hyperelliptic curves*. Invent. Math. 38, 161-185 (1976).
- [12] J.-M. Drezet, M.S. Narasimhan : *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*. Invent. Math. 97, 53-94 (1989).
- [13] W. Fulton : *Intersection theory*, Springer Verlag (1984).
- [14] W. Fulton, J. Harris : *Representation theory : a first course*. Springer Verlag (1991).

- [15] B. van Geemen, E. Izadi : *The tangent space to the moduli space of vector bundles on a curve and the singular locus of the theta divisor of the Jacobian*. J. Algebraic Geom. 10, 133-177 (2001).
- [16] B. Hunt : *The geometry of some special Arithmetic Quotients*. Lectures Notes in Mathematics 1637, SpringerVerlag (1996).
- [17] S. Koizumi : *Theta relations and projective normality of Abelian varieties*. Amer. J. Math. 98 , 865-889 (1996).
- [18] Y. Laszlo : *À propos de l'espace des modules des fibrés de rang 2 sur une courbe*. Math. Annalen 299, 597-608 (1994).
- [19] Y. Laszlo : *Local structure of the moduli space of vector bundles over curves*. Comment. Math. Helvetici 71, 373-401 (1996).
- [20] H. Lange, Ch. Birkenhake : *Complex Abelian Varieties*. Grundlehren 302, Springer Verlag (1982).
- [21] H. Lange, Ch. Birkenhake : *Moduli Spaces of Abelian Surfaces with Isogeny*. Geometry and analysis, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 225-243 (1995).
- [22] H. Lange, Ch. Birkenhake : *A Family of Abelian Surfaces and Curves of Genus Four*. Manuscripta Math. 85, 393-407 (1994).
- [23] D. Mumford : *On equations defining Abelian varieties*. Invent. Math. 1, 287-354 (1966).
- [24] D. Mumford : *Prym varieties I*. Contributions to analysis, New York Academic Press, 325-350 (1974).
- [25] D. Mumford : *Abelian Varieties*. Oxford University Press, 1970
- [26] M.S. Narasimhan, S. Ramanan : *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface*. Ann. of Math. 89, 14-51 (1969).
- [27] M.S. Narasimhan, S. Ramanan :  *$\theta$  linear systems on abelian varieties*. Vector bundles on algebraic varieties, Oxford University Press, 415-427 (1987).
- [28] P.E. Newstead : *Stable bundles of rank 2 and odd degree over a curve of genus 2*. Topology 7, 205-215 (1968).
- [29] W.M. Oxbury : *Prym varieties and the moduli of spin bundles*. Lect. Notes Pure Appl. Math. 200, 351-376 (1998).
- [30] M. Raynaud : *Sections des fibrés vectoriels sur une courbe*. Bull. Soc. Math. France 110, 103-125 (1982).
- [31] E. Verlinde : *Fusion rules and modular transformations in 2d conformal field theory*. Nuclear Physics B300, 360-376 (1988).
- [32] D. Zagier : *Elementary aspects of the Verlinde formula and the Harder-Narasimhan-Atiyah-Bott formula*. Israel Mathematical Conference Proc. 9, 445-462 (1996).